Apuntes - Razones trigonométricas (Matemáticas B)

Curso: 4 Eso

En este tema aprenderás: razones trigonométricas de un ángulo agudo, relaciones fundamentales, razones de 30°, 45° y 60°, resolución de triángulos rectángulos y aplicaciones: alturas y distancias. Cada idea va en un cuadro de color, con ejemplos resueltos paso a paso.

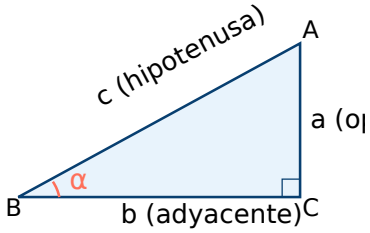
Actividad de introducción: la rampa del skate park

En un skate park de Alcalá de Henares, una rampa mide 3 m de largo y sube 1 m de altura. Otra rampa, más pequeña pero igual de inclinada, mide $1{,}5$ m de largo. ¿Cuánto sube? Como las dos rampas forman triángulos rectángulos semejantes, el cociente entre la altura y la longitud es el mismo: $\frac{1}{3} \approx 0{,}33$. Ese número solo depende del ángulo de inclinación. A ese cociente lo llamamos **seno del ángulo**. Si se divide la altura entre la base horizontal, resulta la **tangente**, y si se divide la base entre la rampa, el **coseno**. Con estas tres razones se pueden calcular ángulos y distancias inaccesibles sin medirlos directamente: la altura de una torre, la anchura de un río o la pendiente de una carretera.

Razones trigonométricas de un ángulo agudo

Propiedad

En un triángulo rectángulo, los lados que forman el ángulo recto son los **catetos** y el lado opuesto al ángulo recto es la **hipotenusa** (el mayor). Para un ángulo agudo α, un cateto es el **opuesto** (el que está enfrente de α) y el otro es el **adyacente** (el que toca a α). Se definen las razones:



Observación

Estas razones solo dependen del ángulo, no del tamaño del triángulo, porque todos los triángulos rectángulos con el mismo ángulo agudo son semejantes. Ejemplo: en el triángulo de catetos 3 y 4 e hipotenusa 5, el ángulo α opuesto al cateto 3 cumple $\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5} = 0{,}6$, $\cos\alpha = \frac{4}{5} = 0{,}8$ y $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4} = 0{,}75$.

Relaciones fundamentales

Propiedad: relaciones fundamentales

- $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$.
- $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (consecuencia del teorema de Pitágoras).
- Los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo suman 90°: $\beta = 90^\circ - \alpha$.

Ejemplo 1

Si $\operatorname{sen}\alpha = 0{,}6$ y α es agudo: $\cos\alpha = \sqrt{1 - 0{,}36} = 0{,}8$ y $\operatorname{tg}\alpha = \frac{0{,}6}{0{,}8} = 0{,}75$.

Propiedad: ángulos complementarios

Si $\alpha + \beta = 90^\circ$, entonces $\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta$ y $\cos\alpha = \operatorname{sen}\beta$. Por ejemplo, $\operatorname{sen}30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.

Razones de 30°, 45° y 60°

α	30°	45°	60°
$\operatorname{sen}\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Observación

Se deducen del triángulo equilátero de lado 2 (cortado por su altura, da ángulos de 30° y 60°, con catetos 1 y $\sqrt{3}$) y del cuadrado de lado 1 (su diagonal mide $\sqrt{2}$). Para los demás ángulos se usa la calculadora en modo grados (DEG): $\operatorname{sen}40^\circ \approx 0{,}6428$. Para obtener el ángulo conocida una razón se usan las teclas inversas: $\alpha = \operatorname{sen}^{-1}(0{,}6) \approx 36{,}87^\circ$.

Resolución de triángulos rectángulos

Observación

Resolver un triángulo rectángulo es hallar todos sus lados y ángulos a partir de los datos. Siempre se necesitan dos datos además del ángulo recto, y al menos uno ha de ser un lado.

Método: resolución de triángulos rectángulos

1. Dibuja el triángulo y marca los datos.
2. Elige la razón que relaciona un dato conocido con la incógnita.
3. Despeja y calcula; si faltan ángulos, usa $\beta = 90^\circ - \alpha$.
4. Comprueba con Pitágoras.

Ejemplo 2

Cateto adyacente $b = 8$ y $\alpha = 40^\circ$. El opuesto: $a = b \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \approx 8 \cdot 0{,}8391 = 6{,}71$. La hipotenusa: $c = \frac{b}{\cos 40^\circ} \approx \frac{8}{0{,}7660} = 10{,}44$. El otro ángulo: 50°.

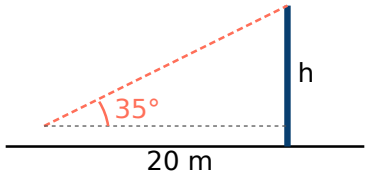
Ejemplo 3

Catetos 6 y 8: la hipotenusa es $\sqrt{36 + 64} = 10$; el ángulo opuesto al 6 cumple $\operatorname{tg} \alpha = \frac{6}{8}$, luego $\alpha \approx 36{,}87^\circ$ y el otro $53{,}13^\circ$.

Aplicaciones: alturas y distancias

Definición: ángulo de elevación

El **ángulo de elevación** es el que forma la horizontal con la visual hacia un punto más alto; el **ángulo de depresión** es el que forma con la visual hacia un punto más bajo. Se modelan con triángulos rectángulos.



Ejemplo 4

Desde un punto a 20 m de un árbol, el ángulo de elevación de la copa es 35°. Si los ojos están a 1,60 m del suelo: $h = 20 \cdot \operatorname{tg} 35^\circ + 1{,}6 \approx 14{,}0 + 1{,}6 = 15{,}6$ m.

Definición: pendiente

La **pendiente** de una carretera es el cociente $\frac{\text{desnivel}}{\text{distancia horizontal}} = \operatorname{tg} \alpha$. Una pendiente del 12 % corresponde a $\operatorname{tg} \alpha = 0{,}12$, es decir, $\alpha \approx 6{,}84^\circ$.

¡Atención! Errores frecuentes

- Confundir opuesto y adyacente: depende del ángulo que se mire.
- Tener la calculadora en radianes (RAD) en lugar de grados (DEG).
- Pensar que sen y cos pueden ser mayores que 1 en un triángulo rectángulo: la hipotenusa es el mayor lado.
- Usar sen cuando los datos son los dos catetos (hay que usar la tangente).

Aplicaciones: ángulos de elevación y depresión

Definición: ángulo de elevación y de depresión

El **ángulo de elevación** es el que forma con la horizontal la visual hacia un objeto situado por encima del observador. El **ángulo de depresión** es el que forma con la horizontal la visual hacia un objeto situado por debajo. Ambos se miden respecto a la horizontal, nunca respecto a la vertical. El ángulo de depresión desde un punto alto es igual al ángulo de elevación desde el punto bajo, porque son ángulos alternos internos entre paralelas.

Método: resolver un problema de alturas y distancias

1. Haz un dibujo y marca el triángulo rectángulo: ángulo, cateto adyacente, cateto opuesto e hipotenusa.
2. Decide qué razón relaciona el dato y la incógnita: seno (opuesto/hipotenusa), coseno (adyacente/hipotenusa) o tangente (opuesto/adyacente).
3. Plantea la ecuación y despeja la incógnita.
4. Si el observador tiene altura, súmala a la altura calculada.
5. Comprueba con otra razón o con Pitágoras, y verifica que la calculadora está en modo grados.

Ejemplo 5

Un dron de Zaragoza vuela a 60 m de altura sobre un punto del suelo situado a 80 m de su vertical. ¿A qué distancia está del punto y bajo qué ángulo se ve desde el suelo?

Por Pitágoras, $d = \sqrt{60^2 + 80^2} = 100$ m. El ángulo de elevación cumple $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{60}{80} = 0{,}75$, luego $\alpha = \operatorname{arctg}\,0{,}75 \approx 36{,}87^\circ$.

Propiedad: pendiente y ángulo

La **pendiente** de una carretera o una rampa expresada en tanto por ciento es la tangente del ángulo multiplicada por 100. Una pendiente del $10\ \%$ significa que se sube 10 m por cada 100 m recorridos en horizontal, lo que corresponde a un ángulo de $\operatorname{arctg}\,0{,}1 \approx 5{,}71^\circ$. Una pendiente del $100\ \%$ equivale a 45°, porque $\operatorname{tg}\,45^\circ = 1$.

Ejemplo 6

Una carretera sube un 7 % . ¿Qué ángulo forma con la horizontal y cuántos metros se asciende tras 2 km de recorrido horizontal?

$\alpha = \operatorname{arctg} 0{,}07 \approx 4{,}00^\circ$. El desnivel es $2000 \cdot 0{,}07 = 140$ m.

¡Atención! Errores frecuentes

- La calculadora debe estar en modo **grados** (DEG), no en radianes ni en grados centesimales.
- El seno y el coseno de un ángulo agudo siempre son menores que 1, porque la hipotenusa es el lado mayor.
- La tangente **no** se calcula con la hipotenusa: es opuesto entre adyacente.
- El ángulo de elevación se mide con la horizontal, no con la vertical.
- Para hallar un ángulo se usa la función inversa: sen^{-1}, $\cos^{-1}$ o tg^{-1}.

Resumen: elegir la razón adecuada

Antes de calcular, nombra los tres lados respecto del ángulo que conoces: el opuesto, el adyacente y la hipotenusa. Si el problema relaciona el opuesto con el adyacente, usa la tangente; si interviene la hipotenusa y el cateto opuesto, el seno; y si interviene la hipotenusa y el cateto adyacente, el coseno. Una regla útil para no confundirse es dibujar siempre el triángulo y escribir encima de cada lado su nombre. Además, conviene estimar el resultado antes de usar la calculadora: una torre vista bajo un ángulo menor de 45 grados siempre será más baja que la distancia al observador.

¿Sabías que?

La palabra «seno» tiene un origen curioso: viene de la traducción de la palabra india «jiva» (cuerda), que los árabes escribieron «jaib» (bolsillo, pliegue) y que los traductores latinos tradujeron como «sinus», que significa precisamente «pliegue» o «bahía». La trigonometría nació para resolver problemas de astronomía y navegación y hoy se usa en topografía, arquitectura, videojuegos, GPS y ondas de sonido.

Trigonometría paso a paso

Método: elegir la razón trigonométrica

1. Dibuja el triángulo rectángulo y marca el ángulo conocido o buscado.
2. Nombra los lados respecto de ese ángulo: cateto opuesto (enfrente), cateto contiguo (al lado) e hipotenusa (enfrente del ángulo recto).
3. Si intervienen el opuesto y la hipotenusa, usa el seno; si son el contiguo y la hipotenusa, el coseno; si son los dos catetos, la tangente.
4. Despeja la incógnita y calcula con la calculadora en modo grados.

5. Comprueba el resultado con el teorema de Pitágoras o con la suma de ángulos.

Ejemplo 7

Una cometa está sujeta con un hilo de 30 m que forma un ángulo de 50° con el suelo. ¿A qué altura vuela?

El hilo es la hipotenusa del triángulo rectángulo y la altura es el cateto opuesto al ángulo de 50°. Como relacionamos opuesto e hipotenusa, usamos el seno: $\operatorname{sen} 50^\circ = \dfrac{h}{30}$, así que $h = 30 \operatorname{sen} 50^\circ \approx 30 \cdot 0{,}766 = 22{,}98$ m. La cometa vuela a unos 23 m del punto donde se sujeta el hilo. La distancia horizontal es $30 \cos 50^\circ \approx 19{,}28$ m, y se comprueba que $22{,}98^2 + 19{,}28^2 \approx 900 = 30^2$.

Observación

El seno y el coseno de un ángulo agudo siempre están entre 0 y 1, porque un cateto es menor que la hipotenusa. La tangente, en cambio, puede tomar cualquier valor positivo.

El consejo de Otto

Repite «SOH-CAH-TOA» en versión española: *seno = opuesto/hipotenusa, coseno = adyacente/hipotenusa, tangente = opuesto/adyacente*.