Soluciones - Razones trigonométricas (Matemáticas B)

Curso: 4 Eso

Solución del ejercicio 1

a. $\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5} = 0{,}6$; $\cos\alpha = \frac{4}{5} = 0{,}8$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4} = 0{,}75$. El seno es el cateto opuesto entre la hipotenusa, el coseno el contiguo entre la hipotenusa y la tangente el opuesto entre el contiguo.

b. $\operatorname{sen}\beta = \frac{4}{5}$; $\cos\beta = \frac{3}{5}$; $\operatorname{tg}\beta = \frac{4}{3} \approx 1{,}33$. Para β el cateto opuesto es el de 4 cm y el contiguo el de 3 cm.

c. $\alpha = \operatorname{arcsen} 0{,}6 \approx 36{,}87^\circ$ y $\beta = \operatorname{arcsen} 0{,}8 \approx 53{,}13^\circ$. Usamos la función inversa del seno de la calculadora en modo grados.

d. $36{,}87 + 53{,}13 = 90$. Además $\operatorname{sen}\alpha = 0{,}6 = \cos\beta$: los ángulos complementarios intercambian seno y coseno.

Solución del ejercicio 2

a. $\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \frac{12}{13}$ y $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$. Despejamos el coseno de la relación fundamental y tomamos la raíz positiva porque el ángulo es agudo; la tangente es el cociente.

b. $\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1 - 0{,}64} = 0{,}6$ y $\operatorname{tg}\alpha = \frac{0{,}6}{0{,}8} = 0{,}75$. Calculamos el seno con la relación fundamental: $0{,}6^2 + 0{,}8^2 = 1$.

c. $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ da $\cos^2\alpha = \frac{1}{5}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} \approx 0{,}447$ y $\operatorname{sen}\alpha = 2\cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5} \approx 0{,}894$. Usamos la relación $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, que se obtiene dividiendo la fundamental entre $\cos^2\alpha$.

d. $\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0{,}943$ y $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0{,}354$. Racionalizamos $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ multiplicando por $\sqrt{2}$.

Solución del ejercicio 3

a. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$. Sustituimos los valores de la tabla: $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$. Respuesta: 1, porque 30° y 60° son complementarios.
b. $\frac{2}{4}+\frac{2}{4}=1$. Es la relación fundamental $\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ con $\alpha=45^\circ$. Respuesta: 1.
c. $\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{3}{3}=1$. Las tangentes de dos ángulos complementarios son inversas, por eso su producto vale 1.
d. $2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}-\frac{3}{2}\approx 0{,}232$. Calculamos cada producto: $2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$ y $\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}$.

Solución del ejercicio 4

a. $\operatorname{sen}37^\circ\approx 0{,}6018$; $\cos 37^\circ\approx 0{,}7986$; $\operatorname{tg}37^\circ\approx 0{,}7536$. Antes de calcular, comprobamos que la calculadora está en modo grados (DEG). Además $\frac{0{,}6018}{0{,}7986}\approx 0{,}7536$, lo que confirma la tangente.
b. $\alpha=\operatorname{arcsen}0{,}8\approx 53{,}13^\circ$. Usamos la tecla inversa del seno ($\sin^{-1}$). Comprobación: $\operatorname{sen}53{,}13^\circ\approx 0{,}8$.
c. $\alpha=\operatorname{arctg}1{,}5\approx 56{,}31^\circ$. Usamos la tecla inversa de la tangente ($\tan^{-1}$). Comprobación: $\operatorname{tg}56{,}31^\circ\approx 1{,}5$.
d. $\alpha=\arccos 0{,}25\approx 75{,}52^\circ$. Usamos la tecla inversa del coseno ($\cos^{-1}$). Comprobación: $\cos 75{,}52^\circ\approx 0{,}25$.

Solución del ejercicio 5

a. $90^\circ-35^\circ=55^\circ$. Los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo suman 90°.
b. $a=10\operatorname{sen}35^\circ\approx 5{,}736$ cm. El cateto opuesto y la hipotenusa se relacionan con el seno: $\operatorname{sen}35^\circ=\frac{a}{10}$.
c. $b=10\cos 35^\circ\approx 8{,}192$ cm. El cateto contiguo y la hipotenusa se relacionan con el coseno: $\cos 35^\circ=\frac{b}{10}$.
d. $a^2+b^2\approx 32{,}9+67{,}1=100$. Área $=\frac{a\,b}{2}\approx 23{,}49$ cm^2. Comprobamos que la suma de los cuadrados de los catetos es 10^2; el área es el semiproducto de los catetos.

Solución del ejercicio 6

a. $c = \sqrt{25 + 144} = 13$ cm. Aplicamos el teorema de Pitágoras: $5^2 + 12^2 = 169 = 13^2$.
b. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{5}{12}$, $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{5}{12} \approx 22{,}62°$. Conocemos los dos catetos, así que usamos la tangente: opuesto entre contiguo.
c. $\beta = 90 - 22{,}62 \approx 67{,}38°$. Los ángulos agudos son complementarios.
d. $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{5}{13} \approx 0{,}385$ y $\cos\alpha = \dfrac{12}{13} \approx 0{,}923$. Con ellos, $c = \dfrac{5}{\operatorname{sen}\alpha} = 13$. La hipotenusa es el cateto opuesto dividido entre el seno. Respuesta: 13 cm, como con Pitágoras.

Solución del ejercicio 7

a. $\operatorname{sen} 70° = \cos 20° \approx 0{,}9397$. Como $70°$ y $20°$ son complementarios, el seno de uno es el coseno del otro.
b. $65° = 90° - 25°$, luego $\operatorname{tg} 65° = \dfrac{1}{\operatorname{tg} 25°}$ y el producto vale 1. Las tangentes de ángulos complementarios son inversas.
c. $\cos 40° = \operatorname{sen} 50°$, así que el cociente vale 1. Los dos ángulos son complementarios, así que numerador y denominador son iguales.
d. $\operatorname{sen}(90° - \alpha) = \cos\alpha = 0{,}6$. El seno del complementario es el coseno del ángulo. Respuesta: 0,6.

Solución del ejercicio 8

a. El ángulo de $40°$ está en los ojos; el cateto adyacente mide 30 m y el opuesto es la altura buscada.
b. $h = 30\operatorname{tg} 40° \approx 25{,}17$ m. El cateto opuesto (altura) y el contiguo (30 m) se relacionan con la tangente.
c. $25{,}17 + 1{,}60 \approx 26{,}77$ m. Sumamos la altura de los ojos del observador.
d. $d = \dfrac{30}{\cos 40°} \approx 39{,}16$ m. La hipotenusa es el cateto contiguo dividido entre el coseno.

Solución del ejercicio 9

a. $h = 5\operatorname{sen} 65° \approx 4{,}53$ m. La escalera es la hipotenusa y la altura el cateto opuesto al ángulo con el suelo.
b. $d = 5\cos 65° \approx 2{,}11$ m. La distancia a la pared es el cateto contiguo, así que usamos el coseno.
c. Con $75°$: $d = 5\cos 75° \approx 1{,}29$ m. Debe estar entre $1{,}29$ m y $2{,}11$ m. Cuanto mayor es el ángulo, más cerca de la pared está el pie.
d. $h = 5\operatorname{sen} 75° \approx 4{,}83$ m. Respuesta: llega a unos 4,83 m, más alto que con 65°.

Solución del ejercicio 10

a. $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}08$, $\alpha = \operatorname{arctg} 0{,}08 \approx 4{,}57°$. La pendiente es la tangente del ángulo de inclinación, así que usamos la función inversa de la tangente.
b. $x = \dfrac{0{,}6}{0{,}08} = 7{,}5$ m. La distancia horizontal es el desnivel dividido entre la pendiente.
c. $L = \sqrt{0{,}6^2 + 7{,}5^2} \approx 7{,}52$ m. La rampa es la hipotenusa del triángulo formado por el desnivel y la distancia horizontal.
d. $4{,}57°$: se cumple. Con $5°$: $\operatorname{tg} 5° \approx 0{,}0875$, pendiente máxima $\approx 8{,}75\ \%$. La pendiente máxima es la tangente de 5°, expresada en porcentaje.

Solución del ejercicio 11

a. La horizontal desde el faro y el mar son paralelas, así que el ángulo de depresión coincide con el de elevación desde el barco (ángulos alternos internos).
b. $d_1 = \dfrac{40}{\operatorname{tg} 18°} \approx 123{,}1$ m.
c. $d_2 = \dfrac{40}{\operatorname{tg} 35°} \approx 57{,}1$ m.
d. $123{,}1 - 57{,}1 \approx 66$ m.

Solución del ejercicio 12

a. $h = 1200 \operatorname{sen} 25° \approx 507{,}1$ m. El desnivel es el cateto opuesto al ángulo de 25° y el cable es la hipotenusa: usamos el seno.
b. $x = 1200 \cos 25° \approx 1087{,}6$ m. La distancia horizontal es el cateto contiguo: usamos el coseno.
c. $\dfrac{1200}{5} = 240$ s $= 4$ min. Dividimos la longitud del cable entre la velocidad.
d. $1100 + 507{,}1 \approx 1607{,}1$ m. Sumamos el desnivel a la altitud de salida. Respuesta: unos 1 607 m.

Solución del ejercicio 13

a. $s = \dfrac{45}{\operatorname{tg} 55°} \approx 31{,}5$ m. La altura es el cateto opuesto y la sombra el contiguo, así que la sombra es la altura entre la tangente. Respuesta: unos 31,5 m.
b. $s = \dfrac{45}{\operatorname{tg} 30°} \approx 77{,}9$ m. Con el sol más bajo, la tangente es menor y la sombra más larga. Respuesta: unos 77,9 m.
c. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{45}{45} = 1$: $\alpha = 45°$. Si la sombra y la altura son iguales, la tangente vale 1.

Respuesta: 45°.

d. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{45}{90} = 0{,}5$: $\alpha \approx 26{,}57°$. Usamos la función inversa de la tangente con 0,5. Respuesta: unos 26,57°.

Solución del ejercicio 14

a. $\alpha = \operatorname{arctg} 0{,}12 \approx 6{,}84°$. La pendiente es la tangente del ángulo: $12\,\% = 0{,}12$.
b. $100 \cdot 0{,}12 = 12$ m. Multiplicamos la distancia horizontal por la pendiente. Respuesta: 12 m.
c. $1000 \operatorname{sen}\alpha \approx 1000 \cdot 0{,}1191 \approx 119{,}1$ m. Ahora la distancia es la hipotenusa, así que usamos el seno del ángulo, no la pendiente. Respuesta: unos 119 m.
d. $\operatorname{tg} 10° \approx 0{,}1763$, es decir un $17{,}6\,\%$. Calculamos la tangente de 10° y la expresamos en porcentaje. Respuesta: un 17,6 %.

Solución del ejercicio 15

a. Desde B: $\operatorname{tg} 45° = 1$, luego $x_B = h$. Desde A: $x_A = \dfrac{h}{\operatorname{tg} 30°} = h\sqrt{3}$.
b. $x_A - x_B = 40$, es decir $h\sqrt{3} - h = 40$, $h(\sqrt{3}-1) = 40$ y
$h = \dfrac{40}{\sqrt{3}-1} = 20(\sqrt{3}+1) \approx 54{,}64$ m.
c. $x_B = h \approx 54{,}64$ m y $x_A = h\sqrt{3} \approx 94{,}64$ m. Su diferencia es 40 m.
d. Desde B: $\dfrac{h}{\operatorname{sen} 45°} \approx 77{,}27$ m. Desde A: $\dfrac{h}{\operatorname{sen} 30°} \approx 109{,}28$ m.

Solución del ejercicio 16

a. Triángulo rectángulo en A con cateto $AB = 30$ m y ángulo $50°$ en B.
b. $AT = 30 \operatorname{tg} 50° \approx 35{,}75$ m. Conocemos el cateto contiguo al ángulo en B y buscamos el opuesto: usamos la tangente.
c. $BT = \dfrac{30}{\cos 50°} \approx 46{,}67$ m. La distancia BT es la hipotenusa: dividimos el cateto contiguo entre el coseno.
d. $30 \operatorname{tg} 35° \approx 21{,}01$ m. Un ángulo menor implica un río más estrecho.

Solución del ejercicio 17

a. $x = \dfrac{3000}{\operatorname{tg} 3°} \approx 57243$ m $\approx 57{,}2$ km. La altura es el cateto opuesto al ángulo de 3° y la distancia horizontal el contiguo.

b. $L = \dfrac{3000}{\operatorname{sen} 3^\circ} \approx 57322$ m. La trayectoria es la hipotenusa.
c. $\dfrac{57{,}2}{250} \cdot 60 \approx 13{,}7$ minutos (con la distancia horizontal aproximada). Dividimos la distancia entre la velocidad y multiplicamos por 60.
d. $1000 \operatorname{tg} 3^\circ \approx 52{,}4$ m por km, es decir, una pendiente del $5{,}2\ \%$.

Solución del ejercicio 18

a. La mitad de la anchura es 5 m: $h = 5 \operatorname{tg} 30^\circ \approx 2{,}89$ m. La altura de la cumbrera es el cateto opuesto al ángulo de 30° y la mitad del ancho, el contiguo.
b. $l = \dfrac{5}{\cos 30^\circ} \approx 5{,}77$ m. Cada faldón es la hipotenusa: dividimos la mitad del ancho entre el coseno.
c. $2 \cdot 5{,}77 \cdot 14 \approx 161{,}7$ m^2. Cada faldón es un rectángulo de 5,77 m por los 14 m de fondo.
d. Coste $\approx 161{,}7 \cdot 55 \approx 8891$ €. Con 40°: $l = \dfrac{5}{\cos 40^\circ} \approx 6{,}53$ m.

Solución del ejercicio 19

a. La altura divide al triángulo en dos rectángulos con ángulo de 20°: media base $= 10 \operatorname{sen} 20^\circ \approx 3{,}42$ cm.
b. Base $= 2 \cdot 3{,}42 \approx 6{,}84$ cm.
c. $h = 10 \cos 20^\circ \approx 9{,}397$ cm.
d. Área $= \dfrac{6{,}84 \cdot 9{,}4}{2} \approx 32{,}14$ cm^2. Con la otra fórmula: $50 \operatorname{sen} 40^\circ \approx 32{,}14$ cm^2. Coinciden. Respuesta: el área es de unos 32,14 cm^2.

Solución del ejercicio 20

a. $\operatorname{sen} \alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, luego $\alpha = 60^\circ$. Despejamos el seno y buscamos el ángulo agudo de la tabla de valores notables.
b. $1 - \cos^2 \alpha = \operatorname{sen}^2 \alpha$; entonces $\dfrac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \operatorname{sen} \alpha$. Aplicamos la relación fundamental en el numerador.
c. $(\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha)^2 = \operatorname{sen}^2 \alpha + 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = 1 + 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$. Desarrollamos el cuadrado de una suma y usamos la relación fundamental.
d. $L = \dfrac{4}{0{,}8} = 5$ m. $\cos \alpha = 0{,}6$, distancia $= 5 \cdot 0{,}6 = 3$ m y $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{0{,}8}{0{,}6} = \dfrac{4}{3}$. Despejamos L del seno y usamos el coseno para la distancia.