Apuntes - Crecimiento y tasas de variación

Curso: 4 Eso

En este tema aprenderás: variar es cambiar, tasa de variación absoluta (TVA), tasa de variación media (TVM), tasa de variación relativa (TVR), crecimiento y tasa de variación y variaciones porcentuales encadenadas. Cada idea va en un cuadro de color, con ejemplos resueltos paso a paso.

Actividad de introducción: ¿cuánto ha cambiado?

Un videojuego costaba 40 € el año pasado y este año cuesta 46 €. Una entrada de cine costaba 8 € y ahora cuesta 9 €. ¿Cuál ha subido más? En euros, el videojuego ($+6$ €) sube más que la entrada ($+1$ €), pero en proporción el videojuego sube un $15\ \%$ y la entrada un $12{,}5\ \%$. Hay dos formas de medir un cambio: la **absoluta** (cuánto) y la **relativa** (cuánto en proporción al valor de partida). Y si el cambio se mide durante varios años, también se puede calcular el **ritmo medio** por año. En este tema estudiarás las tres tasas de variación (absoluta, media y relativa), cómo se combinan los porcentajes sucesivos y cómo se interpretan en las gráficas.

Variar es cambiar

Regla

Para describir cómo cambia una magnitud (la población de una ciudad, el precio de un producto, la temperatura a lo largo del día) se comparan sus valores en dos momentos. Si la magnitud viene dada por una función f y se mira entre $x = a$ y $x = b$, se definen tres medidas.

Definición: tasa de variación

Una **tasa de variación** mide cuánto cambia una función f entre dos valores a y b de la variable. Puede ser **absoluta** (diferencia), **media** (por unidad de x) o **relativa** (respecto al valor inicial).

Tasa de variación absoluta (TVA)

Propiedad

Es la diferencia entre el valor final y el inicial:

$$\mathrm{TVA}[a, b] = f(b) - f(a).$$

Si es positiva, la función ha aumentado; si es negativa, ha disminuido. Tiene las unidades

de f. Ejemplo: si $f(x) = x^2$, $\mathrm{TVA}[1,3] = f(3) - f(1) = 9 - 1 = 8$.

Tasa de variación media (TVM)

Propiedad

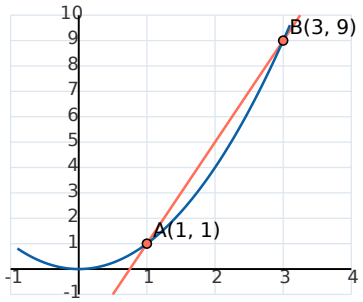
Es la variación por unidad de la variable independiente:

$$\mathrm{TVM}[a,b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Indica cuánto cambia, *de media*, f por cada unidad que avanza x. Con $f(x) = x^2$, $\mathrm{TVM}[1,3] = \frac{8}{2} = 4$. Si f es una distancia y x el tiempo, la TVM es la **velocidad media**: un coche que recorre 100 km en 2 h tiene una velocidad media de 50 km/h.

Propiedad

Interpretación geométrica. La TVM entre a y b es la **pendiente de la recta secante** que pasa por los puntos $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$ de la gráfica. En el ejemplo, la secante por $A(1,1)$ y $B(3,9)$ tiene pendiente 4: $y - 1 = 4(x - 1)$, es decir, $y = 4x - 3$.



Tasa de variación relativa (TVR)

Propiedad

Compara el cambio con el valor inicial, y se suele expresar en porcentaje:

$$\mathrm{TVR}[a,b] = \frac{f(b) - f(a)}{f(a)}.$$

Si un producto pasa de 40 € a 46 €, $\mathrm{TVR} = \frac{6}{40} = 0{,}15$, es decir, una subida del 15 %. Si una población pasa de 50 000 a 47 500 habitantes, $\mathrm{TVR} = \frac{-2\,500}{50\,000} = -0{,}05$: baja un 5 %. La TVR permite comparar cambios en cantidades de distinto tamaño: subir 6 € a un producto de 40 € es mucho más que subir 6 € a uno de 400 €.

Cómo se hace: calcular las tres tasas de variación

1. Calcula $f(a)$ y $f(b)$.
2. TVA: resta final menos inicial, $f(b) - f(a)$.
3. TVM: divide la TVA entre $b - a$.
4. TVR: divide la TVA entre $f(a)$ y multiplica por 100 para obtener un porcentaje.

Ejemplo 1: las tres tasas

Para $f(x) = 2x^2 - x$, calcula TVA, TVM y TVR en $[1, 4]$.

$f(1) = 1$ y $f(4) = 32 - 4 = 28$. TVA $= 27$, TVM $= \frac{27}{3} = 9$ y TVR $= \frac{27}{1} = 27$, es decir, un aumento del 2 700 %.

Ejemplo 2: población de una ciudad

Una ciudad pasa de 12 000 a 13 200 habitantes en 5 años. Calcula la variación absoluta, la media anual y la relativa.

TVA $= 1\,200$ habitantes; TVM $= \frac{1\,200}{5} = 240$ habitantes por año; TVR $= \frac{1\,200}{12\,000} = 0{,}10$, un aumento del 10 %.

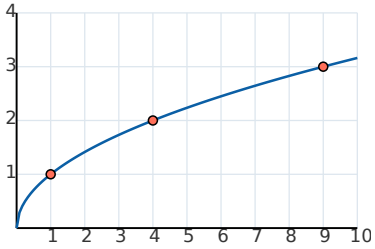
Crecimiento y tasa de variación

Regla

El signo de la TVM dice si la función crece o decrece *en promedio* en ese intervalo: TVM positiva, crece; TVM negativa, decrece; TVM cero, no hay cambio neto. Ojo: $f(x) = x^2$ cumple $\mathrm{TVM}[-2, 2] = \frac{4-4}{4} = 0$ aunque no sea constante, porque baja y luego sube. Para una función afín $y = mx + n$, la TVM en cualquier intervalo es siempre igual a la pendiente m, y por eso el crecimiento es constante.

Observación

Una función puede ser creciente y tener TVM cada vez menor. Es el caso de $f(x) = \sqrt{x}$: $\mathrm{TVM}[0, 1] = 1$, $\mathrm{TVM}[1, 4] = \frac{1}{3}$ y $\mathrm{TVM}[4, 9] = \frac{1}{5}$. Sigue creciendo, pero cada vez más despacio, lo que se aprecia en la gráfica: la curva se va aplanando.



Variaciones porcentuales encadenadas

Observación

Las variaciones relativas no se suman. Un precio de 80 € que baja un 20 % pasa a 64 € y, si luego sube un 25 %, vuelve a $64 \cdot 1{,}25 = 80$ €: la variación total es 0 %, no un 5 %. Para aplicar una variación del r % se multiplica por $1 + \frac{r}{100}$ (índice de variación): $+20\,\%$ equivale a multiplicar por 1,2 y $-20\,\%$ por 0,8. Con interés compuesto del 3 %, un capital de 1 000 € se multiplica cada año por 1,03: 1 030 €, 1 060,90 €, etc.; la TVR anual es constante (3 %), pero la TVA crece (30 €, luego 30,90 €...).

Ejemplo 3: subida y bajada del 10 %

Un precio sube un 10 % y después baja un 10 %. ¿Vuelve al precio inicial?

Se multiplica por $1{,}1$ y luego por $0{,}9$: $1{,}1 \cdot 0{,}9 = 0{,}99$. El precio final es el 99 % del inicial: baja un 1 %.

¡Atención! Errores frecuentes

- Restar al revés: la TVA es $f(b) - f(a)$, final menos inicial.
- Dividir entre $f(b)$ en lugar de $f(a)$ en la TVR.
- Olvidar la unidad: la TVM de una distancia en metros y un tiempo en segundos son m/s.
- Sumar porcentajes de subidas y bajadas sucesivas.

Tasas de variación y porcentajes en la vida diaria

Regla: factor de variación

Una variación porcentual del $p\,\%$ equivale a multiplicar por el **factor de variación** $1 + \dfrac{p}{100}$. Una subida del $20\,\%$ es $\times 1{,}20$; una bajada del $15\,\%$ es $\times 0{,}85$. Para encadenar varias variaciones se multiplican los factores, y la variación total es el producto menos 1. Para deshacer una variación se divide entre su factor.

Ejemplo 1

Un alquiler de 600 € sube un $5\,\%$ y al año siguiente un $4\,\%$. ¿Cuál es el alquiler actual y el aumento total?

Factores $1{,}05$ y $1{,}04$: $1{,}05 \cdot 1{,}04 = 1{,}092$. Alquiler actual $600 \cdot 1{,}092 = 655{,}20$ €. Aumento total $9{,}2\,\%$, algo más que la suma $5 + 4 = 9\,\%$.

Propiedad: tasa media acumulada

Si una cantidad pasa de C_0 a C_n en n periodos, la **tasa constante equivalente** r cumple $C_0(1+r)^n = C_n$, es decir $1+r = \sqrt[n]{\dfrac{C_n}{C_0}}$. No coincide con la media aritmética de las tasas, salvo que sean todas iguales. Esta tasa sirve para comparar evoluciones de distinta duración.

Ejemplo 2

Una población pasa de $20\,000$ a $24\,200$ habitantes en 2 años. Calcula la tasa anual constante equivalente.

$\dfrac{24200}{20000} = 1{,}21$ y $1+r = \sqrt{1{,}21} = 1{,}1$, luego $r = 10\,\%$ anual. Comprobación: $20\,000 \cdot 1{,}1 \cdot 1{,}1 = 24\,200$.

Método: interpretar una tasa en una gráfica

1. Marca en la gráfica los dos puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.
2. Une los puntos con un segmento: su pendiente es la $TVM[a,b]$.
3. Si el segmento sube, la TVM es positiva y la función aumenta en promedio; si baja, es negativa.
4. Compara la inclinación de segmentos en intervalos consecutivos: si cada vez es mayor, el crecimiento se acelera.

¡Atención! Errores habituales

- Dos variaciones porcentuales no se suman: subir un $20\,\%$ y bajar un $20\,\%$ no deja el valor igual.
- La TVR se calcula respecto al valor **inicial**, no al final.
- La TVM es la TVA dividida entre la longitud del intervalo: no la confundas con la TVA.
- Una bajada del $50\,\%$ exige una subida del $100\,\%$ para recuperarse.
- Para calcular el valor inicial hay que dividir entre el factor, no restar el porcentaje.

¿Sabías que?

El cálculo de tasas de variación está en el origen de la derivada, una de las ideas más importantes de las matemáticas. Newton y Leibniz, en el siglo XVII, pensaron qué ocurre con la tasa de variación media cuando el intervalo se hace cada vez más pequeño: así se define la velocidad en un instante. Cada vez que el velocímetro de un coche marca una cifra, está calculando una tasa de variación media en un intervalo pequeñísimo.

Tres tasas, tres preguntas distintas

Ejemplo 4

Un pueblo pasa de 2 000 a 2 300 habitantes en 3 años, y una ciudad pasa de 200 000 a 203 000 en el mismo tiempo. ¿Cuál ha crecido más?

Depende de la pregunta. En términos absolutos, la ciudad ha ganado 3 000 habitantes y el pueblo solo 300, así que la tasa de variación absoluta es mayor en la ciudad. En términos relativos, el pueblo ha crecido $\frac{300}{2\,000} = 0{,}15$, un 15 %, mientras que la ciudad ha crecido $\frac{3\,000}{200\,000} = 0{,}015$, solo un 1,5 %. La tasa de variación media nos dice el ritmo anual: 100 habitantes por año en el pueblo y 1 000 en la ciudad. Para comparar lugares de tamaños muy distintos, la tasa relativa es la más útil.

¡Atención!

Una subida y una bajada del mismo porcentaje no se compensan: tras subir un 10 % y bajar un 10 % el precio queda en el 99 % del inicial.

El consejo de Otto

TVA responde «¿cuánto ha cambiado?», TVM «¿cuánto por unidad?» y TVR «¿qué proporción del inicio?». Piensa en la pregunta y elegirás la tasa correcta.