Apuntes - Semejanza, Pitágoras y modelos geométricos

Curso: 4 Eso

En este tema aprenderás: teorema de Tales y semejanza, razón de áreas y de volúmenes, escalas, teorema de Pitágoras, teoremas del cateto y de la altura y modelos geométricos. Cada idea va en un cuadro de color, con ejemplos resueltos paso a paso.

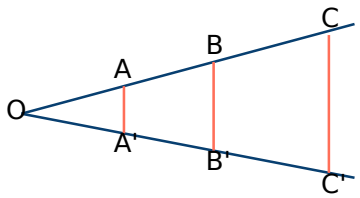
Actividad de introducción: medir lo que no se puede medir

¿Cómo se mide la altura de un árbol, de una torre o de la fachada de una catedral sin subir? Hace más de dos mil años, Tales de Mileto usó la sombra de un palo y la sombra de la pirámide de Keops: en el mismo instante, un palo clavado en vertical y una pirámide proyectan sombras proporcionales a su altura. Hoy los topógrafos, los arquitectos o los diseñadores de maquetas y de mapas usan la misma idea. En este tema aprenderás el **teorema de Tales**, la **semejanza** de figuras con su razón de semejanza, el **teorema de Pitágoras** y los teoremas del cateto y de la altura, y verás cómo la escala de un mapa o una maqueta afecta a las longitudes, las áreas y los volúmenes.

Teorema de Tales y semejanza

Definición: teorema de Tales

El **teorema de Tales** afirma que si varias rectas paralelas cortan a dos rectas secantes, los segmentos determinados en una son proporcionales a los correspondientes de la otra: $\frac{OA}{OA'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$.



Definición: semejantes

Dos figuras son **semejantes** si tienen la misma forma: sus ángulos son iguales y sus lados correspondientes son proporcionales. El cociente entre lados correspondientes es la **razón de semejanza** k. Dos triángulos son semejantes si cumplen alguno de estos criterios:

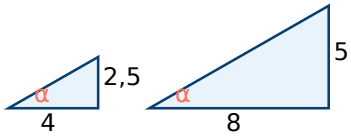
- **AA:** dos ángulos iguales (el tercero lo es automáticamente).
- **LAL:** dos lados proporcionales y el ángulo comprendido igual.

- **LLL:** los tres lados proporcionales.

Ejemplo 1

Los triángulos de lados 3, 4, 5 y 6, 8, 10 son semejantes con $k = 2$ porque $\frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \frac{10}{5}$.

En cambio 3, 4, 5 y 5, 6, 7 no lo son: $\frac{5}{3} \neq \frac{6}{4}$.



Regla

En la figura, los triángulos son semejantes (mismo ángulo α y ángulo recto) con $k = \frac{8}{4} = 2$, de modo que el lado que falta en el grande es $2 \cdot 2{,}5 = 5$.

Razón de áreas y de volúmenes

Propiedad: razón de áreas y de volúmenes

Si la razón de semejanza de las longitudes es k:

- la razón entre las **áreas** es k^2;
- la razón entre los **volúmenes** es k^3.

Ejemplo 2

Con $k = 3$, un cuadrado de lado triple tiene área 9 veces mayor, y un cubo de arista triple tiene volumen 27 veces mayor.

Si dos cilindros semejantes tienen radios 3 y 6 ($k = 2$) y el menor tiene volumen 54π, el mayor tiene $8 \cdot 54\pi = 432\pi$.

Escalas

Propiedad

La **escala** $1 : E$ de un plano o mapa indica que 1 cm del dibujo representa E cm de la realidad. Es una semejanza de razón $\frac{1}{E}$. En un mapa a escala $1 : 50\,000$, $4{,}2$ cm equivalen a $4{,}2 \cdot 50\,000 = 210\,000$ cm $= 2{,}1$ km. Para las áreas se multiplica por E^2 y para los volúmenes por E^3.

Propiedad

Aplicación: sombras. A la misma hora, los rayos del Sol son paralelos y los triángulos formados por un objeto y su sombra son semejantes: un poste de 2 m con sombra de 3 m y un edificio con sombra de 36 m cumplen $\frac{2}{3} = \frac{h}{36}$, así que $h = 24$ m.

Teorema de Pitágoras

Regla

En un triángulo rectángulo con catetos a, b e hipotenusa c: $a^2 + b^2 = c^2$. Sirve para calcular un lado desconocido y también para comprobar si un triángulo es rectángulo (si los lados cumplen la igualdad, lo es). Ternas pitagóricas habituales: $(3, 4, 5)$, $(5, 12, 13)$, $(8, 15, 17)$, $(7, 24, 25)$, $(20, 21, 29)$.

Propiedad: teorema de Pitágoras

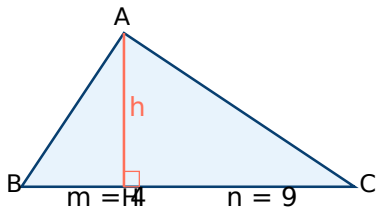
- Diagonal de un rectángulo de lados a y b: $d = \sqrt{a^2 + b^2}$; de un cuadrado de lado l : $l\sqrt{2}$.
- Altura de un triángulo equilátero de lado l: $h = \dfrac{\sqrt{3}}{2} l$.
- Diagonal de un cubo de arista a: $a\sqrt{3}$.

Teoremas del cateto y de la altura

Propiedad: teoremas del cateto y de la altura

Si en un triángulo rectángulo se traza la altura h sobre la hipotenusa, esta queda dividida en dos segmentos m y n (las proyecciones de los catetos) y aparecen triángulos semejantes. De ahí:

- **Teorema de la altura:** $h^2 = m \cdot n$.
- **Teorema del cateto:** cada cateto al cuadrado es igual a la hipotenusa por su proyección: $b^2 = c \cdot m$ y $a^2 = c \cdot n$, con $c = m + n$.



Observación

Con $m = 4$ y $n = 9$: $h^2 = 36 \Rightarrow h = 6$; la hipotenusa mide 13; los catetos son $\sqrt{13 \cdot 4} = \sqrt{52}$ y $\sqrt{13 \cdot 9} = \sqrt{117}$. Se comprueba que $52 + 117 = 169 = 13^2$.

Ejemplo 3: teorema de la altura

En un triángulo rectángulo la altura sobre la hipotenusa la divide en segmentos de 4 cm y 9 cm. Halla la altura.

$h^2 = m \cdot n = 4 \cdot 9 = 36$, luego $h = 6$ cm.

Modelos geométricos

Definición: maqueta

Una **maqueta** es un modelo semejante a escala. Una maqueta a escala $1 : 200$ de un edificio con fachada de 600 cm² tiene una fachada real de $600 \cdot 200^2 = 24\,000\,000$ cm² $= 2\,400$ m². Con una herramienta de **geometría dinámica** se pueden comprobar conjeturas: al mover los vértices de un triángulo, los cocientes de lados correspondientes permanecen constantes si el triángulo se mantiene semejante.

Cómo se hace: resolver un problema con triángulos semejantes

1. Dibuja los dos triángulos y comprueba que tienen los mismos ángulos.
2. Identifica los lados homólogos y escribe la razón de semejanza.
3. Plantea la proporción con la incógnita y resuélvela.
4. Escribe la respuesta con unidades y comprueba que es razonable.

Ejemplo 4: altura con una sombra

Un poste de 2 m proyecta una sombra de 3 m. A la misma hora, un árbol proyecta una sombra de 12 m. ¿Qué altura tiene el árbol?

Los triángulos son semejantes: $\frac{h}{12} = \frac{2}{3}$, luego $h = 8$ m.

¡Atención! Errores frecuentes

- Aplicar k a las áreas o a los volúmenes (hay que usar k^2 y k^3).
- Emparejar mal lados correspondientes: se ordenan de menor a mayor en cada triángulo.
- Escribir $a^2 + b^2 = c^2$ con la hipotenusa como cateto.
- Olvidar convertir unidades al usar escalas (cm a m o km).

Resolver problemas con semejanza y Pitágoras

Método: problemas de semejanza

1. Dibuja un esquema y marca los triángulos que parecen semejantes.
2. Justifica la semejanza: ángulos iguales (por rectas paralelas o ángulo común) o lados proporcionales.
3. Escribe la proporción entre los lados **correspondientes** (los que se oponen a ángulos iguales).
4. Despeja la incógnita.
5. Comprueba que el resultado es razonable: la figura mayor debe tener lados mayores.

Ejemplo 3

Un poste de 2 m proyecta una sombra de 3 m. En ese instante, un edificio proyecta una sombra de 27 m. ¿Qué altura tiene?

Los triángulos son semejantes: $\frac{h}{27} = \frac{2}{3}$, luego $h = \frac{2 \cdot 27}{3} = 18$ m. La razón de semejanza es 9.

Propiedad: razones de semejanza

Si dos figuras son semejantes con razón de semejanza k, entonces: las **longitudes** (lados, perímetros, alturas) están en razón k; las **áreas** están en razón k^2; y los **volúmenes** están en razón k^3. Por eso, una maqueta a escala $1:100$ tiene áreas $10\,000$ veces menores y volúmenes un millón de veces menores que el edificio real.

Ejemplo 4

Dos botes de pintura semejantes tienen alturas de 10 cm y 15 cm. El pequeño contiene $0{,}8$ L. ¿Cuánto contiene el grande?

$k = \frac{15}{10} = 1{,}5$ y la razón de volúmenes es $k^3 = 3{,}375$. Capacidad: $0{,}8 \cdot 3{,}375 = 2{,}7$ L.

Regla: Pitágoras y su recíproco

En un triángulo rectángulo, $a^2 + b^2 = c^2$. Recíprocamente, si los lados de un triángulo cumplen $a^2 + b^2 = c^2$ con c el mayor, el triángulo es rectángulo. Se llaman **ternas pitagóricas** los tres enteros que cumplen la igualdad, como $(3, 4, 5)$, $(5, 12, 13)$, $(8, 15, 17)$ y $(7, 24, 25)$. Para saber si un triángulo es acutángulo u obtusángulo se compara c^2 con $a^2 + b^2$: si c^2, es acutángulo; si $c^2 > a^2 + b^2$, obtusángulo.

Ejemplo 5

¿Es rectángulo un triángulo de lados 9, 12 y 15 cm? ¿Y uno de lados 6, 7 y 10?
$9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225 = 15^2$: sí es rectángulo. $6^2 + 7^2 = 85$: no es rectángulo; como $c^2 > a^2 + b^2$, es obtusángulo.

¡Atención! Errores frecuentes

- En Pitágoras, la hipotenusa es siempre el lado **opuesto al ángulo recto** y el más largo.
- La razón de semejanza se aplica a las longitudes; las áreas necesitan k^2 y los volúmenes k^3.
- En una proporción de Tales hay que emparejar los segmentos correspondientes en el mismo orden.
- Una escala $1 : 50\,000$ significa que 1 cm del mapa son $50\,000$ cm reales, es decir 500 m, no $50\,000$ m.
- No se puede aplicar semejanza si no se ha justificado que los ángulos son iguales.

¿Sabías que?

La anécdota de Tales midiendo la pirámide con una sombra es una de las más antiguas de la matemática griega. El teorema de Pitágoras ya se conocía en Babilonia más de mil años antes de Pitágoras, como muestran tablillas de arcilla con ternas pitagóricas. Hoy las ternas pitagóricas se usan, por ejemplo, para comprobar con una cuerda de 12 nudos que una esquina de obra es de 90 grados: se forma un triángulo de lados 3, 4 y 5.

Observación: unidades en las escalas

Una escala como $1 : 50\,000$ no tiene unidades: significa que cualquier longitud real es 50 000 veces la del mapa, sea en centímetros o en milímetros. Por eso conviene trabajar siempre en la misma unidad y convertir al final. Recuerda que 1 km son 100 000 cm y que, para áreas, hay que usar el cuadrado de la escala.

El consejo de Otto

Antes de plantear una proporción, dibuja los dos triángulos separados y marca los ángulos iguales. Los lados enfrentados a ángulos iguales se corresponden.