Soluciones - Semejanza, Pitágoras y modelos geométricos

Curso: 4 Eso

Solución del ejercicio 1

a. $x = \dfrac{4 \cdot 9}{6} = 6$. Multiplicamos en cruz y despejamos. Comprobación: $\dfrac{4}{6} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$. Respuesta: $x = 6$.

b. $x = \dfrac{5 \cdot 14}{10} = 7$. Multiplicamos en cruz: $10x = 70$. Comprobación: $\dfrac{5}{7} = \dfrac{10}{14}$. Respuesta: $x = 7$.

c. $5x = 3(x + 4)$, $2x = 12$, $x = 6$. Al multiplicar en cruz aparece una ecuación de primer grado. Comprobación: $\dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$. Respuesta: $x = 6$.

d. $x = \dfrac{2{,}4 \cdot 15}{3{,}6} = 10$. Simplificamos $\dfrac{2{,}4}{3{,}6} = \dfrac{2}{3}$. Comprobación: $\dfrac{10}{15} = \dfrac{2}{3}$. Respuesta: $x = 10$.

Solución del ejercicio 2

a. $k = \dfrac{9}{3} = 3$. Dividimos el lado menor del segundo entre el lado menor del primero.

b. Lados $4 \cdot 3 = 12$ cm y $5 \cdot 3 = 15$ cm. Multiplicamos cada lado del primero por la razón k.

c. Perímetros 12 y 36 cm: razón $3 = k$. Los perímetros están en la misma razón que los lados.

d. Áreas $\dfrac{3 \cdot 4}{2} = 6$ y $\dfrac{9 \cdot 12}{2} = 54$ cm^2: razón $9 = k^2$. Las áreas están en razón k^2 porque dependen de dos longitudes.

Solución del ejercicio 3

a. $3{,}2 \cdot 50\,000 = 160\,000$ cm $= 1{,}6$ km. Multiplicamos por la escala y pasamos los centímetros a kilómetros dividiendo entre 100 000.

b. 12 km $= 1\,200\,000$ cm; $\dfrac{1\,200\,000}{50\,000} = 24$ cm. Pasamos los kilómetros a centímetros y dividimos entre la escala.

c. 1 cm^2 del mapa son $50\,000^2$ cm^2 $= 2{,}5 \cdot 10^9$ cm^2 $= 0{,}25$ km^2. Entonces $20 \cdot 0{,}25 = 5$ km^2.

d. 12 km $= 1\,200\,000$ cm entre 6 cm es $200\,000$: escala $1 : 200\,000$. Dividimos la distancia real entre la del mapa, en las mismas unidades.

Solución del ejercicio 4

a. Longitudes: $12 \cdot 3 = 36$ cm. Las longitudes se multiplican por k. Respuesta: 36 cm.
b. Áreas: $10 \cdot 3^2 = 90$ cm^2. Las áreas se multiplican por $k^2 = 9$. Respuesta: 90 cm^2.
c. Volúmenes: $4 \cdot 3^3 = 108$ cm^3. Los volúmenes se multiplican por $k^3 = 27$. Respuesta: 108 cm^3.
d. $k^3 = 27$, luego $k = \sqrt[3]{27} = 3$. Hacemos la raíz cúbica de la razón de volúmenes. Respuesta: $k = 3$.

Solución del ejercicio 5

a. $c = \sqrt{36 + 64} = 10$. La hipotenusa es la raíz de la suma de los cuadrados de los catetos. Respuesta: $c = 10$.
b. $b = \sqrt{169 - 25} = 12$. Para un cateto restamos al cuadrado de la hipotenusa el cuadrado del otro cateto. Respuesta: $b = 12$.
c. $b = \sqrt{625 - 49} = 24$. Restamos cuadrados: $625 - 49 = 576 = 24^2$. Respuesta: $b = 24$.
d. $d = \sqrt{25 + 25} = 5\sqrt{2} \approx 7{,}07$ cm. La diagonal es la hipotenusa de un triángulo rectángulo con dos lados del cuadrado como catetos.

Solución del ejercicio 6

a. $c = 4 + 9 = 13$ cm. La hipotenusa es la suma de los dos segmentos.
b. $h^2 = 4 \cdot 9 = 36$, $h = 6$ cm. La altura es la media proporcional entre los dos segmentos.
c. $b^2 = 4 \cdot 13 = 52$, $b = \sqrt{52} \approx 7{,}21$ cm. $c_2^2 = 9 \cdot 13 = 117$, $c_2 = \sqrt{117} \approx 10{,}82$ cm. Cada cateto es la media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella.
d. $52 + 117 = 169 = 13^2$. Área $= \dfrac{13 \cdot 6}{2} = 39$ cm^2. El área es la hipotenusa por la altura dividido entre 2.

Solución del ejercicio 7

a. Los rayos del sol son paralelos, así que los ángulos son iguales (y ambos tienen un ángulo recto): triángulos semejantes.
b. $\dfrac{h}{12} = \dfrac{1{,}80}{2{,}40}$, $h = \dfrac{12 \cdot 1{,}8}{2{,}4} = 9$ m.
c. $k = \dfrac{12}{2{,}4} = 5$.

d. La altura del árbol es 9 m: $\frac{s}{1{,}8} = \frac{18}{9}$, luego $s = 3{,}6$ m.

Solución del ejercicio 8

a. $h = \sqrt{36 - 2{,}25} = \sqrt{33{,}75} \approx 5{,}81$ m. La escalera es la hipotenusa; restamos el cuadrado de la distancia a la pared.
b. $d = \sqrt{36 - 25} = \sqrt{11} \approx 3{,}32$ m. Ahora conocemos la hipotenusa y la altura; despejamos el otro cateto.
c. $d \leq \sqrt{36 - 16} = \sqrt{20} \approx 4{,}47$ m. Cuanto más lejos está el pie, menos sube la escalera.
d. Con 3 m: $h = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27} \approx 5{,}20$ m. Baja $5{,}81 - 5{,}20 \approx 0{,}61$ m. Respuesta: la parte alta baja unos 61 cm.

Solución del ejercicio 9

a. Altura $\frac{6000}{200} = 30$ cm, ancho $\frac{4500}{200} = 22{,}5$ cm y fondo $\frac{4000}{200} = 20$ cm.
b. Razón de áreas $200^2 = 40\,000$: $300 \cdot 40\,000 = 12\,000\,000$ cm^2 $= 1200$ m^2.
c. Razón de volúmenes $200^3 = 8\,000\,000$: $5 \cdot 8\,000\,000 = 40\,000\,000$ L $= 40\,000$ m^3.
d. Porque el área depende de dos longitudes: se multiplica por k^2, no por k. Los volúmenes se multiplican por k^3.

Solución del ejercicio 10

a. $4{,}5 \cdot 25\,000 = 112\,500$ cm $= 1{,}125$ km. Multiplicamos por la escala y pasamos a kilómetros. Respuesta: 1,125 km.
b. 6 km $= 600\,000$ cm; $\frac{600\,000}{25\,000} = 24$ cm. Pasamos a centímetros y dividimos entre la escala. Respuesta: 24 cm.
c. Dimensiones reales 500×750 m: $375\,000$ m^2 $= 0{,}375$ km^2. Calculamos las dimensiones reales: $2 \cdot 25\,000 = 50\,000$ cm = 500 m y $3 \cdot 25\,000$ cm = 750 m.
d. 450 m $= 450\,000$ mm; $\frac{450\,000}{25\,000} = 18$ mm. Pasamos los metros a milímetros y dividimos entre la escala.

Solución del ejercicio 11

a. $55 \cdot 2{,}54 = 139{,}7$ cm. Multiplicamos las pulgadas por 2,54.

b. $337k^2 = 139{,}7^2$, $k = \dfrac{139{,}7}{\sqrt{337}} \approx 7{,}61$. Las dos medidas son proporcionales a 16 y 9; la diagonal es la hipotenusa.
c. Ancho $16k \approx 121{,}8$ cm y alto $9k \approx 68{,}5$ cm. Multiplicamos k por 16 y por 9.
d. Razón de longitudes $\dfrac{55}{32} \approx 1{,}72$; razón de áreas $\left(\dfrac{55}{32}\right)^2 \approx 2{,}95$. Las dos pantallas son semejantes con razón $\dfrac{55}{32}$; las áreas están en razón k^2.

Solución del ejercicio 12

a. $A_1 = \pi \cdot 10^2 \approx 314{,}2$ cm^2 y $A_2 = \pi \cdot 15^2 \approx 706{,}9$ cm^2.
b. $k = \dfrac{30}{20} = 1{,}5$ y razón de áreas $k^2 = 2{,}25$ ($\dfrac{706{,}9}{314{,}2} = 2{,}25$).
c. $\dfrac{8}{314{,}2} \approx 0{,}0255$ €/cm^2 y $\dfrac{15}{706{,}9} \approx 0{,}0212$ €/cm^2.
d. Conviene la grande. Para igualar el precio por cm^2 debería costar $8 \cdot 2{,}25 = 18$ €; cuesta 15 €.

Solución del ejercicio 13

a. $d = \sqrt{105^2 + 68^2} = \sqrt{15\,649} \approx 125{,}1$ m. La diagonal es la hipotenusa del triángulo formado por el largo y el ancho.
b. Bordeando: $105 + 68 = 173$ m. Recorre $173 - 125{,}1 \approx 47{,}9$ m más.
c. Diagonal: $\dfrac{125{,}1}{6} \approx 20{,}8$ s. Bordeando: $\dfrac{173}{6} \approx 28{,}8$ s. Dividimos la distancia entre la velocidad.
d. Dimensiones $52{,}5 \times 34$ m: área 1785 m^2, que es $\dfrac{1}{4}$ de los 7140 m^2 del campo grande ($k^2 = \dfrac{1}{4}$).

Solución del ejercicio 14

a. $k = \dfrac{45}{15} = 3$. Dividimos el lado mayor del cartel entre el de la foto.
b. $10 \cdot 3 = 30$ cm. Multiplicamos el lado menor por k.
c. Razón de áreas 9. Foto 150 cm^2 y cartel 1350 cm^2. Las áreas se multiplican por $k^2 = 9$.
d. Para que el lado menor sea 24 cm: $k = \dfrac{24}{10} = 2{,}4$ y el lado mayor $15 \cdot 2{,}4 = 36$ cm.

Solución del ejercicio 15

a. El triángulo pequeño (hasta la primera estaca) y el grande (hasta la segunda) comparten el ángulo en A y tienen lados paralelos: son semejantes.
b. Los lados correspondientes son proporcionales: $\frac{x}{x+12} = \frac{4}{10}$.
c. $10x = 4(x+12)$, $6x = 48$, $x = 8$ m.
d. $\frac{8}{20} = 0{,}4 = \frac{4}{10}$. La razón de semejanza del pequeño al grande es $0{,}4$ (o $2{,}5$ del grande al pequeño).

Solución del ejercicio 16

a. $L = \sqrt{120^2 + 500^2} = \sqrt{264\,400} \approx 514{,}2$ m. La pista es la hipotenusa del triángulo formado por el desnivel y la distancia horizontal.
b. $\frac{120}{500} = 0{,}24$: pendiente del $24\ \%$. Dividimos el desnivel entre la distancia horizontal y lo expresamos en porcentaje.
c. 54 km/h $= 15$ m/s; $\frac{514{,}2}{15} \approx 34{,}3$ s. Pasamos los km/h a m/s dividiendo entre 3,6 y dividimos la distancia entre la velocidad.
d. Razón $k = \frac{60}{120} = 0{,}5$: distancia horizontal 250 m y longitud $257{,}1$ m. Todas las longitudes se multiplican por la razón 0,5.

Solución del ejercicio 17

a. Razón de volúmenes $\left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{125}$: $\frac{2000}{125} = 16$ L. La escala lineal es $\frac{1}{5}$, así que los volúmenes se dividen entre $5^3 = 125$.
b. Razón de áreas $\frac{1}{25}$: $\frac{24}{25} = 0{,}96$ m^2. Las áreas se dividen entre $5^2 = 25$.
c. $\frac{1{,}5}{5} = 0{,}3$ m. Las longitudes se dividen entre 5.
d. $\frac{16}{0{,}5} = 32$ s. Dividimos la capacidad entre el caudal. Respuesta: 32 segundos.

Solución del ejercicio 18

a. Mitad de la base 5 m: $\sqrt{25+9} = \sqrt{34} \approx 5{,}83$ m. Cada faldón es la hipotenusa del triángulo de catetos 5 m (mitad de la base) y 3 m (altura).
b. $2 \cdot 5{,}83 \cdot 12 \approx 139{,}9$ m^2. Cada faldón es un rectángulo de 5,83 m por los 12 m de

largo.

c. $139{,}9 \cdot 18 \approx 2518$ €. Multiplicamos la superficie por el precio.

d. Razón de áreas $k^2 = 2{,}25$: $139{,}9 \cdot 2{,}25 \approx 314{,}8$ m^2. Las superficies se multiplican por k^2.

Solución del ejercicio 19

a. El triángulo pequeño (linterna-muñeco) y el grande (linterna-sombra) son semejantes porque comparten el ángulo en la linterna y la altura del muñeco es paralela a la sombra.

b. $\dfrac{s}{10} = \dfrac{5}{2}$, $s = 25$ cm.

c. $\dfrac{40}{10} = \dfrac{5}{d}$, $d = \dfrac{5}{4} = 1{,}25$ m.

d. Razón de longitudes $\dfrac{5}{2} = 2{,}5$; razón de áreas $2{,}5^2 = 6{,}25$.

Solución del ejercicio 20

a. Diagonal de la base $4\sqrt{2}$; diagonal del cubo $\sqrt{(4\sqrt{2})^2 + 4^2} = \sqrt{32 + 16} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \approx 6{,}93$ cm.

b. $m + n = 25$ y $mn = h^2 = 144$. Las raíces de $t^2 - 25t + 144 = 0$ son 9 y 16. Segmentos de 9 y 16.

c. $k = \sqrt{\dfrac{49}{25}} = \dfrac{7}{5}$. Razón de volúmenes $k^3 = \dfrac{343}{125} \approx 2{,}74$.

d. Si los lados son $5t$, $12t$ y $13t$: $(5t)^2 + (12t)^2 = 25t^2 + 144t^2 = 169t^2 = (13t)^2$. Se cumple Pitágoras, luego es rectángulo.