Apuntes - Técnicas de recuento y probabilidad

Curso: 4 Eso

En este tema aprenderás: experimentos aleatorios y sucesos, regla de Laplace, tablas de doble entrada, diagramas de árbol y experimentos compuestos, probabilidad condicionada e independencia y técnicas de recuento. Cada idea va en un cuadro de color, con ejemplos resueltos paso a paso.

Actividad de introducción: la rifa del colegio

En la rifa de un colegio de Huesca hay 200 papeletas numeradas y se regalan tres premios. Tienes una papeleta. ¿Qué probabilidad tienes de ganar el primer premio? ¿Y de ganar alguno de los tres? Y si te regalan otra papeleta, ¿cuántas parejas de papeletas distintas pueden formarse con 200? Para responder necesitas dos herramientas: la **probabilidad**, que mide lo posible que es un suceso con un número entre 0 y 1, y las **técnicas de recuento**, que permiten contar casos sin escribirlos todos. En este tema aprenderás a calcular probabilidades con la regla de Laplace, a combinar sucesos, a trabajar con experimentos de varias etapas mediante diagramas de árbol y a contar con variaciones, permutaciones y combinaciones.

Experimentos aleatorios y sucesos

Definición: experimento aleatorio

Un **experimento aleatorio** es aquel cuyo resultado no se puede predecir con certeza aunque se repita en las mismas condiciones: lanzar un dado, sacar una carta, tirar una moneda. El **espacio muestral** Ω es el conjunto de todos los resultados posibles; un **suceso** es un subconjunto de Ω. Al lanzar un dado, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y el suceso «sale par» es $A = \{2, 4, 6\}$.

Propiedad

Operaciones con sucesos: el **complementario** $\overline{A}$ (no ocurre A), la **unión** $A \cup B$ (ocurre A o B) y la **intersección** $A \cap B$ (ocurren los dos). Son **incompatibles** si $A \cap B = \varnothing$.

Regla de Laplace

Propiedad

Si todos los resultados de Ω son **equiprobables**, la probabilidad de un suceso A es

$$P(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}.$$

Así, $P(\text{par}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ y $P(\text{mayor que } 4) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Las probabilidades están entre 0 (suceso imposible) y 1 (suceso seguro).

Propiedad: regla de Laplace

- .
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$; si son incompatibles, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Ejemplo 1

En una baraja española de 40 cartas, $P(\text{oros}) = \frac{10}{40}$, $P(\text{rey}) = \frac{4}{40}$ y el rey de oros está en ambos: $P(\text{rey u oros}) = \frac{10}{40} + \frac{4}{40} - \frac{1}{40} = \frac{13}{40}$.

Tablas de doble entrada

Para experimentos con dos etapas equiprobables (dos dados), una tabla muestra todos los resultados. Aquí aparecen las 36 sumas posibles:

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Regla

La suma 7 aparece 6 veces: $P(\text{suma } 7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. La suma 8 aparece 5 veces: $\frac{5}{36}$. La suma 2 solo una vez: $\frac{1}{36}$.

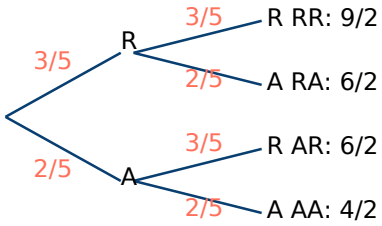
Diagramas de árbol y experimentos compuestos

Observación

Un **experimento compuesto** tiene varias etapas. En el **diagrama de árbol** cada rama lleva su probabilidad; la probabilidad de un camino completo se calcula *multiplicando* las de sus ramas (regla del producto) y la de un suceso se halla

sumando los caminos que lo forman.

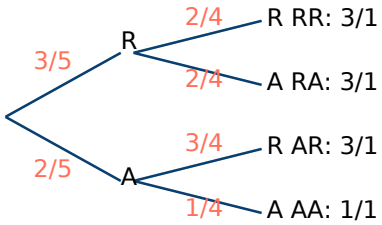
Con reemplazamiento (sucesos independientes). Una urna con 3 bolas rojas (R) y 2 azules (A); se extraen dos bolas devolviendo la primera:



Observación

$P(\text{RR}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$. $P(\text{distinto color}) = P(\text{RA}) + P(\text{AR}) = \frac{6}{25} + \frac{6}{25} = \frac{12}{25}$.

Sin reemplazamiento (sucesos dependientes). Si no se devuelve la bola, las probabilidades de la segunda etapa cambian:



Regla

La suma de las cuatro ramas es $\frac{3}{10} + \frac{3}{10} + \frac{3}{10} + \frac{1}{10} = 1$.
$P(\text{mismo color}) = \frac{3}{10} + \frac{1}{10} = \frac{2}{5}$.

Cómo se hace: resolver un problema con un diagrama de árbol

1. Dibuja una rama por cada resultado de cada etapa.
2. Escribe la probabilidad sobre cada rama (cambia si no hay reemplazamiento).
3. Multiplica las probabilidades a lo largo de cada camino.
4. Suma los caminos que forman el suceso pedido y comprueba que el total es 1.

Probabilidad condicionada e independencia

Propiedad

La probabilidad de A sabiendo que ha ocurrido B es $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$. En una tabla, es la fracción de la columna o fila del suceso condicionante. Dos sucesos son

independientes si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, es decir, si saber que ocurre B no cambia la probabilidad de A.

Ejemplo 2: probabilidad condicionada

En una clase de 30 alumnos hay 12 chicas y 5 de ellas juegan al baloncesto. Se elige a una chica al azar: ¿cuál es la probabilidad de que juegue al baloncesto?

Condicionamos a «chica»: $P(\text{baloncesto}|\text{chica}) = \frac{5}{12} \approx 0{,}42$. La probabilidad conjunta es $\frac{5}{30}$, pero al saber que es chica el total pasa a ser 12.

Técnicas de recuento

Propiedad: técnicas de recuento

- **Principio de multiplicación:** si una tarea tiene m formas y otra n, juntas hay $m \cdot n$. Con 3 primeros, 4 segundos y 2 postres hay $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ menús.
- **Factorial:** $n! = n(n-1)\cdots 2 \cdot 1$. Las **permutaciones** de n elementos son $n!$: 5 amigos en fila se ordenan de $5! = 120$ formas.
- **Variaciones** (importa el orden): elegir y ordenar k de n sin repetir es $n(n-1)\cdots(n-k+1)$. Un PIN de 4 cifras distintas: $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5\,040$; con repetición, 10^4.
- **Combinaciones** (no importa el orden): $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. Elegir 2 delegados de 6: $\binom{6}{2} = 15$.

Ejemplo 3: combinaciones

¿De cuántas formas se pueden elegir 3 representantes entre 8 candidatos?

No importa el orden, luego son combinaciones: $\binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$.

¡Atención! Errores frecuentes

- Aplicar Laplace cuando los resultados no son equiprobables (por ejemplo, la suma de dos dados: 7 es más probable que 2).
- Olvidar que, sin reemplazamiento, la segunda probabilidad cambia.
- Sumar probabilidades de sucesos que no son incompatibles sin restar la intersección.
- Confundir variaciones (con orden) y combinaciones (sin orden).

Técnicas de recuento

Regla: principio de multiplicación

Si una tarea se hace en dos etapas y la primera puede hacerse de m formas y, para cada una de ellas, la segunda de n formas, entonces la tarea completa puede hacerse de $m \cdot n$ formas. Se extiende a tres o más etapas. Es la regla que justifica el número de ramas de un diagrama de árbol y el cálculo de contraseñas, matrículas o menús.

Definición: variaciones, permutaciones y combinaciones

- **Variaciones** de n elementos tomados de k en k: se eligen k elementos *importando el orden*, sin repetir. $V_{n,k} = n(n-1)\cdots(n-k+1)$. Con repetición: n^k.
- **Permutaciones** de n elementos: formas de ordenarlos todos. $P_n = n! = n(n-1)\cdots 2 \cdot 1$.
- **Combinaciones** de n elementos tomados de k en k: se eligen k elementos *sin importar el orden*. $C_{n,k} = \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$.

Ejemplo 2

¿De cuántas formas pueden sentarse 5 amigos en una fila de 5 asientos? ¿Y elegir 2 de ellos para ir a comprar?

Sentarse: $P_5 = 5! = 120$ formas. Elegir a 2 de 5 sin orden: $C_{5,2} = \dfrac{5 \cdot 4}{2} = 10$ formas.

Método: elegir la técnica de recuento

1. Pregúntate si importa el orden: si cambia el resultado al permutar los elementos, importa.
2. Si importa el orden y se eligen algunos elementos, usa variaciones; si se usan todos, permutaciones.
3. Si no importa el orden, usa combinaciones.
4. Si los elementos pueden repetirse, usa n^k.
5. Comprueba con un caso pequeño que puedes enumerar a mano.

Probabilidad total y regla de Bayes

Regla: probabilidad total y teorema de Bayes

Si los sucesos $A_1, A_2, \ldots$ forman un sistema completo (son incompatibles y cubren todo el espacio), la **probabilidad total** de un suceso B es $P(B) = \sum P(A_i)\,P(B \mid A_i)$

. La **regla de Bayes** invierte la condición: $P(A_i \mid B) = \dfrac{P(A_i)\,P(B \mid A_i)}{P(B)}$. En un diagrama de árbol, $P(B)$ es la suma de los productos de las ramas que terminan en B .

Ejemplo 3

Una caja A tiene 3 bolas rojas y 1 azul; otra caja B tiene 1 roja y 3 azules. Se elige una caja al azar y se saca una bola roja. ¿Cuál es la probabilidad de que sea de la caja A?

$P(\text{roja}) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$. Entonces $P(A \mid \text{roja}) = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{3}{4}$.

¡Atención! Errores frecuentes

- No confundas «o» con «y»: «o» suma (restando la intersección) y «y» multiplica, si los sucesos son independientes.
- Sin devolución, las probabilidades de la segunda extracción cambian; con devolución, no.
- $P(A \mid B)$ y $P(B \mid A)$ son distintas: la probabilidad de estar enfermo si das positivo no es la de dar positivo si estás enfermo.
- Dos sucesos incompatibles no son independientes: si uno ocurre, el otro es imposible.
- Comprueba siempre que las probabilidades de todas las ramas suman 1.

¿Sabías que?

La teoría de la probabilidad nació en el siglo XVII gracias a una correspondencia entre Blaise Pascal y Pierre de Fermat sobre cómo repartir el premio de un juego de azar interrumpido. Un siglo después, el reverendo Thomas Bayes descubrió la regla que lleva su nombre, hoy esencial en la medicina, en los filtros de correo basura y en la inteligencia artificial.

Elegir la herramienta adecuada

Observación: tabla, árbol o recuento

Cuando los datos se clasifican según dos características, como chicos y chicas con o sin gafas, la tabla de doble entrada es la herramienta más cómoda, porque permite leer directamente las probabilidades condicionadas. Cuando el experimento se hace en varias etapas, como sacar dos bolas seguidas, conviene un diagrama de árbol: las probabilidades se multiplican a lo largo de cada rama y se suman las ramas favorables. Y cuando hay muchos casos igualmente probables, se cuentan con variaciones, permutaciones o combinaciones antes de aplicar la regla de Laplace.

El consejo de Otto

Si el enunciado dice «al menos uno», calcula el complementario («ninguno») y réstalo de 1. Casi siempre es más rápido.