Soluciones - Técnicas de recuento y probabilidad

Curso: 4 Eso

Solución del ejercicio 1

a. Hay $6 \cdot 6 = 36$ resultados, por ejemplo $(1,1)$, $(1,2)$, $(3,5)$ y $(6,6)$.

b. Casos favorables: $(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)$, es decir 6. $P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

c. Cada dado tiene 3 pares: $3 \cdot 3 = 9$ casos. $P = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.

d. Suma ≥ 10: $(4,6), (5,5), (6,4), (5,6), (6,5), (6,6)$, o sea 6: $P = \frac{1}{6}$. Al menos un 6: 11 casos, $P = \frac{11}{36}$. Para «al menos un 6» es más rápido el contrario: $1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$.

Solución del ejercicio 2

a. Total 10 bolas. $P(\text{roja}) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ y $P(\text{azul}) = \frac{3}{10}$. Aplicamos la regla de Laplace: casos favorables entre casos posibles.

b. $P(\text{no azul}) = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$. Usamos el suceso contrario de «azul».

c. $P(\text{roja o verde}) = \frac{5}{10} + \frac{2}{10} = \frac{7}{10}$ (sucesos incompatibles). Una bola no puede ser roja y verde a la vez, por eso sumamos sin restar nada.

d. No hay bolas amarillas: $P = 0$. Es un suceso imposible.

Solución del ejercicio 3

a. $P(A \cup B) = 0{,}5 + 0{,}4 - 0{,}2 = 0{,}7$. Restamos la intersección para no contar dos veces los resultados comunes. Respuesta: 0,7.

b. . La probabilidad del suceso contrario es 1 menos la del suceso. Respuesta: 0,5.

c. $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}5 - 0{,}2 = 0{,}3$. Quitamos a A la parte que también está en B. Respuesta: 0,3.

d. . «Ninguno de los dos» es el contrario de «al menos uno», es decir, de la unión. Respuesta: 0,3.

Solución del ejercicio 4

a. Con gafas: chicos 6, chicas 9 (total 15). Sin gafas: chicos 24, chicas 21 (total 45). Sumamos por columnas para obtener los totales.

b. $P(\text{gafas}) = \dfrac{15}{60} = \dfrac{1}{4}$ y $P(\text{chica}) = \dfrac{30}{60} = \dfrac{1}{2}$.

c. $P(\text{gafas} \mid \text{chica}) = \dfrac{9}{30} = \dfrac{3}{10}$. $P(\text{chica} \mid \text{gafas}) = \dfrac{9}{15} = \dfrac{3}{5}$. En la condicionada, el total de referencia es el grupo de la condición: 30 chicas o 15 alumnos con gafas.

d. Como $\dfrac{3}{10} \neq \dfrac{1}{4}$, los sucesos no son independientes (aunque la diferencia es pequeña).

Solución del ejercicio 5

a. Primera: R con $\dfrac{4}{10}$, N con $\dfrac{6}{10}$. Segunda tras R: R con $\dfrac{3}{9}$, N con $\dfrac{6}{9}$. Tras N: R con $\dfrac{4}{9}$, N con $\dfrac{5}{9}$. En la segunda extracción queda una bola menos.

b. $P(RR) = \dfrac{4}{10} \cdot \dfrac{3}{9} = \dfrac{2}{15}$. $P(NN) = \dfrac{6}{10} \cdot \dfrac{5}{9} = \dfrac{1}{3}$. Multiplicamos las probabilidades de cada rama.

c. $P(RN) + P(NR) = \dfrac{4}{10} \cdot \dfrac{6}{9} + \dfrac{6}{10} \cdot \dfrac{4}{9} = \dfrac{4}{15} + \dfrac{4}{15} = \dfrac{8}{15}$.

d. $P(\text{al menos una roja}) = 1 - P(NN) = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$. Las ramas: $\dfrac{2}{15} + \dfrac{4}{15} + \dfrac{4}{15} + \dfrac{5}{15} = 1$.

Solución del ejercicio 6

a. $2^3 = 8$ resultados: CCC, CCX, CXC, XCC, CXX, XCX, XXC, XXX. Cada lanzamiento tiene 2 resultados, así que hay $2 \cdot 2 \cdot 2$ en total.

b. $P(CCC) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{8}$.

c. Casos: CCX, CXC, XCC. $P = \dfrac{3}{8}$.

d. Por independencia, $P = \dfrac{1}{2}$ (la moneda no tiene memoria). Al menos una cara: $1 - P(XXX) = 1 - \dfrac{1}{8} = \dfrac{7}{8}$.

Solución del ejercicio 7

a. $P(R) = \frac{3}{8}$, $P(A) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$, $P(V) = \frac{1}{4}$, $P(Y) = \frac{1}{8}$. Cada color ocupa un número de sectores entre los 8 iguales.

b. $\frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{9}{64}$. Como los giros son independientes, multiplicamos las probabilidades. Respuesta: $\frac{9}{64}$.

c. $\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{8} = \frac{6}{64} = \frac{3}{32}$. También multiplicamos porque los giros son independientes. Respuesta: $\frac{3}{32}$.

d. $\frac{9+4+4+1}{64} = \frac{18}{64} = \frac{9}{32}$. Sumamos las cuatro posibilidades: dos rojos, dos azules, dos verdes y dos amarillos. Respuesta: $\frac{9}{32}$.

Solución del ejercicio 8

a. $P(\text{oros}) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$ y $P(\text{figura}) = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$. Hay 10 cartas de oros y 12 figuras entre 40 cartas.

b. $P(\text{oros o figura}) = \frac{10}{40} + \frac{12}{40} - \frac{3}{40} = \frac{19}{40}$ (hay 3 figuras de oros). Restamos las 3 figuras de oros, que se contarían dos veces.

c. $P = \frac{1}{40}$. Solo hay un as de oros entre 40 cartas.

d. $\frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} = \frac{12}{1560} = \frac{1}{130}$. Sin devolución, en la segunda extracción quedan 3 ases entre 39 cartas.

Solución del ejercicio 9

a. $P(D \cup M) = \frac{18+12-5}{30} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$. Restamos los 5 alumnos que hacen las dos cosas para no contarlos dos veces.

b. $1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$ (son 5 alumnos). Usamos el suceso contrario. Respuesta: 5 alumnos no hacen ninguna de las dos cosas.

c. $P(D \mid M) = \frac{5}{12}$. Entre los 12 que tocan un instrumento, 5 practican deporte.

d. $P(M \mid D) = \frac{5}{18}$. Son distintas: la condición cambia el conjunto de referencia. Ahora el total de referencia son los 18 deportistas.

Solución del ejercicio 10

a. Casos: $(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)$. $P = \dfrac{5}{36}$. Contamos los pares cuya suma es 8 entre los 36 posibles.

b. $S = 9$: 4 casos; 10: 3; 11: 2; 12: 1. Total 10: $P = \dfrac{10}{36} = \dfrac{5}{18}$. Sumamos los casos de cada suma de 9 a 12.

c. Con primer dado par y suma 8: $(2,6),(4,4),(6,2)$: $\dfrac{3}{36} = \dfrac{1}{12}$.

d. $P(S = 8 \mid \text{par}) = \dfrac{1/12}{1/2} = \dfrac{1}{6}$. Dividimos la probabilidad de la intersección entre la de la condición, $\dfrac{1}{2}$.

Solución del ejercicio 11

a. $\dfrac{1}{4}$. Solo una de las 4 opciones es correcta.

b. $\dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{16}$. Las preguntas son independientes, así que multiplicamos.

c. $\left(\dfrac{3}{4}\right)^5 = \dfrac{243}{1024} \approx 0{,}237$. Cada pregunta se falla con probabilidad $\dfrac{3}{4}$.

d. $1 - \dfrac{243}{1024} = \dfrac{781}{1024} \approx 0{,}763$. Acertar alguna es probable, pero el valor esperado de aciertos es $5 \cdot \dfrac{1}{4} = 1{,}25$, lejos de aprobar.

Solución del ejercicio 12

a. Sábado: lluvia $0{,}3$, no lluvia $0{,}7$. Domingo tras lluvia: $0{,}6$ y $0{,}4$; tras sol: $0{,}2$ y $0{,}8$.

b. $0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}18$. Multiplicamos las probabilidades de la rama lluvia-lluvia.

c. $P(D) = 0{,}3 \cdot 0{,}6 + 0{,}7 \cdot 0{,}2 = 0{,}18 + 0{,}14 = 0{,}32$. Sumamos las dos ramas que terminan en lluvia el domingo.

d. Ningún día: $0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}56$. Al menos uno: $1 - 0{,}56 = 0{,}44$. «Al menos un día» es el contrario de «ningún día».

Solución del ejercicio 13

a. Máquina: A $0{,}6$ y B $0{,}4$. Defecto: tras A, $0{,}02$; tras B, $0{,}05$.

b. $P(\text{def}) = 0{,}6 \cdot 0{,}02 + 0{,}4 \cdot 0{,}05 = 0{,}012 + 0{,}020 = 0{,}032$. Sumamos las dos ramas que terminan en defecto (probabilidad total).

c. $P(A \mid \text{def}) = \dfrac{0{,}012}{0{,}032} = 0{,}375$. Aplicamos el teorema de Bayes: rama de A entre el total de defectuosas.
d. $P(B \mid \text{def}) = \dfrac{0{,}020}{0{,}032} = 0{,}625$ y $0{,}375 + 0{,}625 = 1$. Respuesta: el 62,5 % de las defectuosas viene de B.

Solución del ejercicio 14

a. Principio de multiplicación: $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ conjuntos.
b. $C_{4,2} = \dfrac{4!}{2!\,2!} = 6$ formas. El orden no importa, por eso usamos combinaciones.
c. $P_4 = 4! = 24$ formas. El orden sí importa y usamos todas las camisetas: permutaciones.
d. Hay 3 conjuntos con esa camiseta y esas zapatillas (uno por cada pantalón). $P = \dfrac{3}{24} = \dfrac{1}{8}$.

Solución del ejercicio 15

a. $10^4 = 10\,000$. Cada una de las 4 cifras tiene 10 opciones.
b. $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$. Cada cifra tiene una opción menos que la anterior.
c. Un intento: $\dfrac{1}{10\,000} = 0{,}0001$. Tres intentos distintos: $\dfrac{3}{10\,000} = 0{,}0003$.
d. $\dfrac{5040}{10\,000} = 0{,}504$. Dividimos los PIN con cifras distintas entre el total. Respuesta: algo más de la mitad.

Solución del ejercicio 16

a. $C_{10,3} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$. El orden no importa, así que son combinaciones.
b. Se fija a Juan y se eligen 2 de los 9 restantes: $C_{9,2} = 36$.
c. $P = \dfrac{36}{120} = \dfrac{3}{10}$.
d. Juan y Ana: falta elegir 1 de 8: 8 comisiones, $P = \dfrac{8}{120} = \dfrac{1}{15}$. Con cargos: $V_{10,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

Solución del ejercicio 17

a. $V_{8,3} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$.

b. $\frac{1}{336} \approx 0{,}003$.
c. Primera: $\frac{1}{8}$. En el podio: $\frac{3}{8}$ (hay 3 puestos entre 8 corredores por simetría).
d. Podios con las dos: eligen puestos para Ana (3) y Berta (2) y otro corredor de los 6 restantes: $3 \cdot 2 \cdot 6 = 36$. $P = \frac{36}{336} = \frac{3}{28}$.

Solución del ejercicio 18

a. Enfermo $0{,}02$ (positivo $0{,}9$, negativo $0{,}1$); sano $0{,}98$ (positivo $0{,}05$, negativo $0{,}95$).
b. $P(+) = 0{,}02 \cdot 0{,}9 + 0{,}98 \cdot 0{,}05 = 0{,}018 + 0{,}049 = 0{,}067$.
c. $P(E \mid +) = \frac{0{,}018}{0{,}067} \approx 0{,}269$, es decir, un $26{,}9\ \%$.
d. Porque la enfermedad es poco frecuente: hay muchos más sanos que enfermos, y el $5\ \%$ de un grupo muy grande de sanos produce más falsos positivos $(0{,}049)$ que verdaderos positivos $(0{,}018)$.

Solución del ejercicio 19

a. $0{,}7^3 = 0{,}343$. Los tiros son independientes, así que multiplicamos.
b. Hay 3 posiciones para el fallo: $3 \cdot 0{,}7^2 \cdot 0{,}3 = 3 \cdot 0{,}49 \cdot 0{,}3 = 0{,}441$.
c. $0{,}441 + 0{,}343 = 0{,}784$. Sumamos los casos de dos y de tres aciertos.
d. Fallar los tres: $0{,}3^3 = 0{,}027$. Exactamente uno: $3 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3^2 = 0{,}189$. Suma: $0{,}027 + 0{,}189 + 0{,}441 + 0{,}343 = 1$.

Solución del ejercicio 20

a. Todas distintas: $\frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \approx 0{,}9918$. Alguna coincidencia: $\approx 0{,}0082$.
b. El numerador cuenta las formas de asignar días distintos (variaciones sin repetición) y el denominador todas las asignaciones posibles (365^n).
c. Con solo 23 personas es ligeramente más probable que haya una coincidencia que no: el resultado sorprende porque lo normal es pensar en una coincidencia con una persona concreta, no con cualquier pareja ($\frac{23 \cdot 22}{2} = 253$ parejas).
d. Hacen falta 23 personas, porque con 22 la probabilidad es $\approx 0{,}476$ y con 23 ya es $\approx 0{,}507$.