Apuntes - Operaciones con números reales y precisión

Curso: 4 Eso

En este tema aprenderás: potencias de exponente entero, exponentes fraccionarios y radicales, racionalizar denominadores, notación científica y aproximación y error. Cada idea va en un cuadro de color, con ejemplos resueltos paso a paso.

Actividad de introducción: el crecimiento de las bacterias

Un cultivo de un laboratorio de Salamanca empieza con 500 bacterias y cada veinte minutos su número se duplica. Anota cuántas hay a los 20, 40 y 60 minutos y comprueba que la secuencia es $500 \cdot 2$, $500 \cdot 2 \cdot 2$, $500 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$: una multiplicación repetida que se escribe con potencias. Si ahora quieres saber cuántas había una hora antes de empezar, necesitarás exponentes negativos, y si quieres calcular el lado de un cuadrado de área 18, necesitarás raíces. Con distancias astronómicas o tamaños de virus aparecen además números enormes o minúsculos que se manejan con la notación científica. Este tema reúne todas estas herramientas y enseña a calcular con ellas, a simplificar resultados y a controlar el error que se comete al aproximar.

Potencias de exponente entero

Propiedad: potencias de exponente entero

Una potencia a^n con n entero positivo es el producto de a por sí mismo n veces. Se extiende a exponentes enteros con $a^0 = 1$ (si $a \neq 0$) y $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Las propiedades, válidas para bases no nulas, son:

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ y $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.
- $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ y $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$.
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$.

Ejemplo 1

$$\frac{2^3 \cdot 2^{-5}}{2^{-2}} = 2^{3-5+2} = 2^0 = 1.$$

Ejemplo 2: propiedades de las potencias

Simplifica $\frac{2^5 \cdot 2^{-2}}{2^4}$.

Se suman exponentes en el numerador: $2^{5-2} = 2^3$. Se restan: $\frac{2^3}{2^4} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$.

Exponentes fraccionarios y radicales

Definición: raíz n-ésima

La **raíz n-ésima** de a se define como $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$. Si n es par, a debe ser positivo o cero; si n es impar, a puede ser negativo: $\sqrt[3]{-27} = -3$. En general $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$. Así, $8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = 2^2 = 4$ y $27^{-1/3} = \frac{1}{3}$.

Propiedad

Propiedades de los radicales (con el mismo índice): $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ y $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$.

Para **extraer factores** se descompone el radicando: $\sqrt{72} = \sqrt{2^3 \cdot 3^2} = 2 \cdot 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$. Dos radicales son **semejantes** si tienen el mismo índice y el mismo radicando tras simplificar; solo así se pueden sumar: $\sqrt{50} + \sqrt{8} - \sqrt{18} = 5\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.

Regla

Para operar radicales de distinto índice se escriben como potencias y se reducen a índice común: $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{2} = 2^{1/3} \cdot 2^{1/2} = 2^{5/6} = \sqrt[6]{32}$.

Racionalizar denominadores

Racionalizar es eliminar las raíces del denominador sin cambiar el valor de la fracción.

Propiedad: racionalizar denominadores

- Un solo radical: $\frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$.
- Binomio con raíz: se multiplica por el **conjugado**.
  $\frac{4}{\sqrt{5}-1} = \frac{4(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{4(\sqrt{5}+1)}{5-1} = \sqrt{5}+1$.

Regla

La clave está en la identidad $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, que hace desaparecer las raíces cuadradas.

Cómo se hace: racionalizar un denominador

1. Si el denominador es $\sqrt{a}$, multiplica numerador y denominador por $\sqrt{a}$.
2. Si es $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$, multiplica por su conjugado $\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$.
3. Usa $(p+q)(p-q) = p^2 - q^2$ para eliminar las raíces del denominador.
4. Simplifica el resultado.

Ejemplo 3: racionalizar

Racionaliza $\frac{2}{\sqrt{3}-1}$.

Multiplicamos por el conjugado: $\frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{3-1} = \sqrt{3}+1$.

Notación científica

Propiedad

Un número está en **notación científica** si se escribe $a \cdot 10^n$ con $1 \leq a$ y n entero. Sirve para cantidades muy grandes o muy pequeñas: $45\,000\,000 = 4{,}5 \cdot 10^7$ y $0{,}00032 = 3{,}2 \cdot 10^{-4}$. Para multiplicar o dividir se operan por separado los coeficientes y las potencias de 10: $(3 \cdot 10^5)(2 \cdot 10^{-2}) = 6 \cdot 10^3$. Para sumar se iguala el exponente: $3{,}2 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 = 3{,}2 \cdot 10^4 + 0{,}5 \cdot 10^4 = 3{,}7 \cdot 10^4$. Si el coeficiente sale fuera de $[1, 10)$, se reajusta: $15 \cdot 10^{-2} = 1{,}5 \cdot 10^{-1}$.

Aproximación y error

Propiedad

Los irracionales y muchos decimales se manejan con aproximaciones. Se puede **truncar** (cortar las cifras sobrantes) o **redondear** (si la primera cifra que se quita es 5 o más, se sube la última que se conserva). Por ejemplo, $\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$ redondeado a milésimas es $1{,}414$; π redondeado a centésimas es $3{,}14$.

Propiedad: aproximación y error

Si V es el valor exacto y A la aproximación:

- **Error absoluto:** $E_a = |V - A|$.
- **Error relativo:** $E_r = \dfrac{E_a}{|V|}$, que se suele dar en porcentaje.

Propiedad

Al redondear hasta un orden de unidad u (décimas, centésimas...), el error absoluto es como mucho $\frac{u}{2}$. Las **cifras significativas** son las que aportan información: se cuentan desde la primera cifra distinta de cero. El número $0{,}0305$ tiene tres cifras significativas, y $23\,456$ redondeado a tres cifras significativas es $23\,500$.

Ejemplo 2

Se mide un listón de 5 m y se anota 4,9 m.

Error absoluto: $|5-4{,}9| = 0{,}1$ m. Error relativo: $\frac{0{,}1}{5} = 0{,}02 = 2\,\%$. Medir 49 m cuando son 50 m da el mismo error relativo y un error absoluto diez veces mayor, por eso el error relativo es el que mejor indica la calidad de una medida.

¡Atención! Errores frecuentes

- Sumar radicales no semejantes: $\sqrt{2}+\sqrt{3} \neq \sqrt{5}$.
- Escribir $(a+b)^n = a^n + b^n$: es falso.
- Olvidar que a^{-n} no es negativo, es una fracción: $2^{-3} = \frac{1}{8}$.
- Dejar un coeficiente como $12 \cdot 10^5$ en notación científica sin reajustarlo.

Radicales: simplificar, operar y comparar

Método: extraer factores de un radical

1. Descompón el radicando en factores primos: $72 = 2^3 \cdot 3^2$.
2. Cada factor cuyo exponente sea mayor o igual que el índice sale de la raíz dividiendo el exponente entre el índice (el resto se queda dentro): $\sqrt{2^3 \cdot 3^2} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2}$.
3. Multiplica lo que ha salido y deja dentro lo que queda: $\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$.

Ejemplo 3

Simplifica $\sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{3}$.

$81 = 3^4$, luego $\sqrt[3]{81} = 3\sqrt[3]{3}$. $24 = 2^3 \cdot 3$, luego $\sqrt[3]{24} = 2\sqrt[3]{3}$. La expresión queda $3\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3}$, porque todos los radicales son semejantes.

Regla: operaciones con radicales

- Solo se pueden sumar o restar radicales **semejantes** (mismo índice y mismo radicando): $3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$.
- Para multiplicar o dividir radicales del mismo índice se multiplican o se dividen

los radicandos: $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$.
- Si tienen índices distintos, se reducen primero a índice común (el mínimo común múltiplo de los índices).
- Para comparar radicales de distinto índice también se reducen a índice común y se comparan los radicandos.

Ejemplo 4

Compara $\sqrt[3]{4}$ y $\sqrt{3}$ sin calculadora.

El mínimo común múltiplo de 3 y 2 es 6. $\sqrt[3]{4}=\sqrt[6]{4^2}=\sqrt[6]{16}$ y $\sqrt{3}=\sqrt[6]{3^3}=\sqrt[6]{27}$. Como 16, resulta $\sqrt[3]{4}$ (en efecto, $1{,}587$).

¡Atención! Errores con raíces y potencias

- $\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$: por ejemplo $\sqrt{9+16}=5$ y $\sqrt{9}+\sqrt{16}=7$.
- $(a+b)^2\neq a^2+b^2$: falta el doble producto $2ab$.
- 2^{-3} no es -8: es $\dfrac{1}{8}$. El exponente negativo invierte la base, no cambia el signo.
- $-3^2=-9$ pero $(-3)^2=9$.
- No se racionaliza «pasando» la raíz arriba: hay que multiplicar numerador y denominador por la misma expresión.

Operar con notación científica

Propiedad: notación científica

Un número en **notación científica** se escribe $a\cdot 10^n$ con $1\leq a$ y n entero. Para multiplicar se multiplican las mantisas y se suman los exponentes; para dividir se dividen las mantisas y se restan los exponentes. Para sumar o restar hay que igualar antes los exponentes. Después se vuelve a colocar la mantisa entre 1 y 10 ajustando el exponente.

Ejemplo 5

La masa de un grano de arena es de $2\cdot 10^{-5}$ kg. ¿Cuántos granos hay en una tonelada (10^3 kg)?

$\dfrac{10^3}{2\cdot 10^{-5}}=0{,}5\cdot 10^{3-(-5)}=0{,}5\cdot 10^8=5\cdot 10^7$ granos, es decir, cincuenta millones.

Definición: logaritmo (Matemáticas B)

El **logaritmo** en base a de un número $x>0$ es el exponente al que hay que elevar a

para obtener x: $\log_a x = y$ equivale a $a^y = x$. Por ejemplo, $\log_2 8 = 3$ porque $2^3 = 8$, y $\log_{10} 0{,}01 = -2$ porque $10^{-2} = 0{,}01$. Los logaritmos permiten manejar escalas muy amplias, como el pH, los decibelios o la escala de Richter.

Ejemplo 6

Calcula $\log_5 125$, $\log_2 \dfrac{1}{16}$ y $\log_{10} 1\,000\,000$.

$5^3 = 125$, luego $\log_5 125 = 3$. $2^{-4} = \dfrac{1}{16}$, luego $\log_2 \dfrac{1}{16} = -4$. $10^6 = 1\,000\,000$, luego el tercero vale 6.

Método: resolver problemas de crecimiento con potencias

1. Identifica el valor inicial C_0 y el factor de cambio f por periodo (duplicar: $f = 2$; subir un 3 %: $f = 1{,}03$; reducir a la mitad: $f = \dfrac{1}{2} = 2^{-1}$).
2. Escribe el modelo $C(n) = C_0 \cdot f^{\,n}$, donde n es el número de periodos completos.
3. Sustituye el valor de n pedido y calcula; si se busca n, prueba valores sucesivos o compara potencias conocidas.
4. Interpreta el resultado con sus unidades y comprueba que tiene sentido: una cantidad que crece no puede disminuir.

Ejemplo 7

Una cuenta de 1 500 € crece un 2 % anual. ¿Cuánto habrá en 3 años?

El factor es $1{,}02$ y el modelo $C(n) = 1500 \cdot 1{,}02^n$. Para $n = 3$: $1500 \cdot 1{,}061208 = 1591{,}81$ €. Se ganan unos $91{,}81$ € en tres años.

¿Sabías que?

El escocés John Napier publicó en 1614 las primeras tablas de logaritmos, que durante tres siglos permitieron a astrónomos, marinos e ingenieros convertir multiplicaciones muy largas en simples sumas. Hasta la aparición de las calculadoras electrónicas, en los años setenta, las reglas de cálculo, basadas en logaritmos, eran la herramienta habitual de cualquier ingeniero. La notación científica, por su parte, es el lenguaje de la astronomía: la luz del Sol tarda unos 499 segundos en llegar a la Tierra.

Potencias y raíces: la misma idea

Propiedad: radicales como potencias

Toda raíz se puede escribir como una potencia de exponente fraccionario: $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$. Gracias a esta equivalencia, las propiedades de las potencias sirven

también para operar con radicales. Para multiplicar raíces de distinto índice, por ejemplo, basta con escribirlas como potencias, sumar los exponentes y volver a escribir el resultado como raíz. El índice de la raíz pasa al denominador del exponente y el exponente del radicando, al numerador.

Ejemplo 8

Calcula $\sqrt{8} \cdot \sqrt[4]{2}$ dejando el resultado como una sola raíz.

Escribimos cada factor como potencia de 2: $\sqrt{8} = (2^3)^{1/2} = 2^{3/2}$ y $\sqrt[4]{2} = 2^{1/4}$. Al multiplicar potencias de la misma base sumamos los exponentes: $\frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$. El resultado es $2^{7/4} = \sqrt[4]{2^7} = \sqrt[4]{128}$, que también se puede simplificar extrayendo 2^4: $2\sqrt[4]{8}$. Comprobamos con la calculadora: los dos números valen aproximadamente 3,36.

Observación

Antes de operar con radicales, simplifícalos siempre: muchas veces lo que parecían raíces distintas resultan ser radicales semejantes que se pueden sumar.

El consejo de Otto

Antes de racionalizar o sumar radicales, simplifica cada uno. Muchas veces el problema se vuelve mucho más corto.