# Ejercicios - Operaciones con números reales y precisión

Curso: 4 Eso · 20

Se debe mostrar el desarrollo de cada ejercicio.

## Ejercicio 1

### Ejercicio 1 – Propiedades de las potencias

Simplifica cada expresión y deja el resultado como una potencia o como una fracción irreducible.

a. $\dfrac{2^5 \cdot 2^{-3}}{2^4}$

b. $\dfrac{(3^2)^3 \cdot 3^{-4}}{3^5}$

c. $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-3} \cdot \left(\dfrac{2}{5}\right)^{2}$

d. $\dfrac{6^4}{2^4 \cdot 3^2}$

## Ejercicio 2

### Ejercicio 2 – Exponentes negativos y fraccionarios

Calcula sin calculadora.

a. $2^{-4}$ y $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}$

b. $25^{1/2}$ y $27^{2/3}$

c. $16^{-3/4}$

d. $\sqrt[3]{-64}$ y $(-8)^{2/3}$

## Ejercicio 3

### Ejercicio 3 – Extraer factores de la raíz

Simplifica extrayendo todos los factores posibles.

a. $\sqrt{72}$ y $\sqrt{180}$

b. $\sqrt[3]{54}$ y $\sqrt[3]{128}$

c. $\sqrt{50} + \sqrt{18} - \sqrt{8}$

d. $\sqrt{12} \cdot \sqrt{27}$

## Ejercicio 4

**Ejercicio 4 – Operaciones con radicales**

Efectúa y simplifica.

a. $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2}$ (reduce a índice común)
b. $\dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$
c. $(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})$
d. $(3-\sqrt{2})^2$

## Ejercicio 5

**Ejercicio 5 – Racionalizar**

Racionaliza el denominador de cada fracción y simplifica.

a. $\dfrac{6}{\sqrt{3}}$
b. $\dfrac{4}{\sqrt[3]{2}}$
c. $\dfrac{5}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}$
d. $\dfrac{2}{3+\sqrt{5}}$

## Ejercicio 6

**Ejercicio 6 – Notación científica**

Escribe en notación científica y opera.

a. $45\,000\,000$ y $0{,}000\,073$
b. $(3{,}2 \cdot 10^{5}) \cdot (2{,}5 \cdot 10^{-3})$
c. $\dfrac{9 \cdot 10^{8}}{4 \cdot 10^{-2}}$
d. $6{,}1 \cdot 10^{7} + 3{,}9 \cdot 10^{6}$

## Ejercicio 7

**Ejercicio 7 – La luz del Sol**

La distancia media de la Tierra al Sol es de $1{,}496 \cdot 10^8$ km y la luz viaja a $3 \cdot 10^5$ km/s.

a. Calcula el tiempo en segundos que tarda la luz en llegar desde el Sol (notación científica).
b. Pásalo a minutos y redondea a las décimas.
c. La distancia a la estrella Próxima Centauri es de $4{,}0 \cdot 10^{13}$ km. ¿Cuántas veces mayor es que la distancia Tierra-Sol?
d. ¿Cuántos años tarda la luz en llegar desde Próxima Centauri? (1 año $\approx 3{,}15 \cdot 10^7$ s)

## Ejercicio 8

### Ejercicio 8 – Bacterias en el laboratorio

En un laboratorio de la Universidad de Salamanca, un cultivo tiene $500$ bacterias y su número se duplica cada $20$ minutos.

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| Bacterias | 500 | ? | ? | ? | ? |

a. Escribe el número de bacterias tras $n$ periodos de 20 minutos como potencia.
b. Completa la tabla para $n = 0, 1, 2, 3, 4$.
c. ¿Cuántas bacterias hay tras 3 horas? Exprésalo en notación científica.
d. ¿Cuántos periodos hacen falta para superar el millón?

## Ejercicio 9

### Ejercicio 9 – Capacidad del disco

Un ordenador tiene un disco de $1$ TB. Recuerda que, en informática, $1$ KB $= 2^{10}$ bytes, $1$ MB $= 2^{10}$ KB, $1$ GB $= 2^{10}$ MB y $1$ TB $= 2^{10}$ GB.

a. Expresa $1$ TB en bytes como potencia de 2 y en notación científica (3 cifras significativas).
b. ¿Cuántas fotos de $4$ MB caben en el disco?
c. Una película ocupa $2^{32}$ bytes. ¿Cuántas películas caben?
d. ¿Cuántos bytes más tiene $1$ TB que $10^{12}$ bytes y qué porcentaje representa?

## Ejercicio 10

### Ejercicio 10 – La escalera de la fachada

Para pintar la fachada de un edificio de Sevilla, un pintor apoya una escalera de $5$ m en la pared, con el pie a $1{,}5$ m de la base de la pared.

a. Calcula con Pitágoras a qué altura llega la escalera. Deja el resultado exacto con raíz.
b. Simplifica el resultado y da una aproximación con dos decimales.

c. Si la escalera se aleja hasta que el pie está a $2{,}5$ m, ¿a qué altura llega ahora? Exacto y aproximado.
d. ¿Cuánto desciende la parte superior?

## Ejercicio 11

**Ejercicio 11 – La alfombra cuadrada**

Una alfombra cuadrada ocupa $18$ m$^2$ en el salón de una casa de Logroño.

a. Calcula el lado de la alfombra en forma exacta y simplificada.
b. Da una aproximación en centímetros.
c. Calcula la diagonal de la alfombra en forma exacta.
d. ¿Cabe en una habitación de $4$ m de ancho y $4{,}5$ m de largo? ¿Y en diagonal sobre el suelo de una habitación de $5$ m de largo?

## Ejercicio 12

**Ejercicio 12 – Interés compuesto**

Una familia de Valladolid ingresa $2\,000$ € en una cuenta que paga un $3\ \%$ anual de interés compuesto.

a. Escribe el capital $C(n)$ tras $n$ años con una potencia.
b. Calcula el capital tras 1, 2, 5 y 10 años (redondea a céntimos).
c. ¿Cuántos años hacen falta para superar los $2\,500$ €?
d. Si el interés fuera del $4\ \%$, ¿cuánto se gana más en 10 años?

## Ejercicio 13

**Ejercicio 13 – Aproximaciones y error**

Se quiere aproximar $\sqrt{7} \approx 2{,}6457513\ldots$

a. Redondea a las décimas y a las centésimas.
b. Calcula el error absoluto de cada aproximación.
c. Calcula el error relativo (en %) de la segunda.
d. Si el lado de un cuadrado es $\sqrt{7}$ cm, ¿qué error absoluto se comete en su área al usar $2{,}65$ como lado?

## Ejercicio 14

**Ejercicio 14 – Desintegración radiactiva**

Una muestra de un isótopo usado en medicina tiene una masa de $80$ mg y su masa se reduce a la mitad cada $6$ horas (periodo de semidesintegración).

a. Escribe la masa $m(n)$ tras $n$ periodos con una potencia de exponente negativo.

b. Calcula la masa tras 6, 12, 24 y 36 horas.
c. ¿Cuánto tiempo hace falta para que quede menos de $1$ mg?
d. Expresa la masa tras 48 horas en notación científica (en mg).

## Ejercicio 15

### Ejercicio 15 – El depósito cúbico

Un depósito de agua con forma de cubo en una finca de La Rioja debe almacenar $27\,000$ L. Recuerda que $1$ m$^3$ son $1\,000$ L.

a. Calcula el volumen en m$^3$ y la arista del cubo (raíz cúbica exacta).
b. Calcula el área total de las seis caras, que hay que impermeabilizar.
c. Un segundo depósito cúbico almacena $50\,000$ L. Calcula su arista: forma exacta y aproximada con dos decimales.
d. Si el segundo depósito costó $3{,}50$ € por m$^2$ de impermeabilización, ¿cuánto costaron sus seis caras?
e. ¿Cuántas veces cabe el primer depósito en el segundo? Razona si la arista del segundo es el doble de la del primero.

## Ejercicio 16

### Ejercicio 16 – Población de España y del mundo

La tabla recoge datos aproximados de población.

| Lugar | Habitantes |
|---|---|
| España | 48 000 000 |
| Mundo | 8 000 000 000 |
| Madrid (ciudad) | 3 300 000 |
| Soria (provincia) | 88 000 |

a. Escribe todos los datos en notación científica.
b. ¿Cuántas veces es mayor la población mundial que la de España? Da el resultado en notación científica.
c. ¿Qué porcentaje de la población mundial vive en España?
d. Si España crece un $0{,}5\ \%$ al año, ¿qué población tendrá en 10 años? (usa $1{,}005^{10} \approx 1{,}0511$)

## Ejercicio 17

### Ejercicio 17 – Pantallas y píxeles

Una pantalla 4K de un televisor tiene $3\,840$ píxeles de ancho y $2\,160$ de alto; una pantalla Full HD tiene $1\,920 \times 1\,080$. Cada píxel usa $3$ bytes para el color en una imagen fija.

a. Calcula el número de píxeles de cada pantalla en notación científica.
b. ¿Cuántas veces tiene más píxeles la 4K que la Full HD? Explica por qué.
c. Calcula los bytes de una imagen 4K y exprésalos en MB (con $1$ MB $= 10^6$ bytes).
d. Una película de $90$ minutos a $24$ imágenes por segundo, sin compresión, ¿cuántos TB ocuparía? (1 TB $= 10^{12}$ bytes)
e. Razona por qué en la realidad ocupa mucho menos.

## Ejercicio 18

### Ejercicio 18 – El pH y los logaritmos (Matemáticas B)

El pH de una disolución se define como $\mathrm{pH} = -\log[\mathrm{H}^+]$, donde $[\mathrm{H}^+]$ es la concentración de iones de hidrógeno en mol/L. Recuerda que $\log_{10} 10^k = k$. En la cocina se usan sustancias muy distintas.

a. Calcula el pH del agua pura, con $[\mathrm{H}^+] = 10^{-7}$.
b. El zumo de limón tiene $[\mathrm{H}^+] = 10^{-2}$ y el bicarbonato disuelto $10^{-9}$. Halla su pH e indica cuál es ácido.
c. El vinagre tiene $\mathrm{pH} = 3$. ¿Cuántas veces mayor es su concentración de $\mathrm{H}^+$ que la del agua pura?
d. Calcula $\log_2 32$, $\log_3 \dfrac{1}{9}$ y $\log_{10} 0{,}001$.

## Ejercicio 19

### Ejercicio 19 – El triángulo del jardinero

Un jardín de un parque de Zaragoza tiene forma de triángulo rectángulo. Sus catetos miden $\sqrt{8}$ m y $\sqrt{18}$ m. Se va a vallar todo el contorno y a cubrir de césped toda la superficie.

a. Simplifica las longitudes de los catetos.
b. Calcula la hipotenusa de forma exacta y simplificada.
c. Calcula el perímetro y su valor aproximado con dos decimales.
d. Calcula el área en forma exacta y el coste de césped si cuesta $4{,}50$ € el m$^2$.
e. Si se quiere dejar un camino de $0{,}5$ m de ancho paralelo a la hipotenusa, razona con una frase por qué el área verde pasa a ser menor que la exacta.

## Ejercicio 20

### Ejercicio 20 – Desafío: potencias y radicales

Resuelve estos retos.

a. Simplifica $\dfrac{2^{n+2} - 2^n}{2^{n+1}}$ para cualquier $n$.

b. Demuestra que $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ y calcula $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+2}$.

c. ¿Qué número es mayor, $\sqrt[3]{3}$ o $\sqrt{2}$? (reduce a índice común).

d. Si $x + \frac{1}{x} = 3$, calcula $x^2 + \frac{1}{x^2}$.