Soluciones - Operaciones con números reales y precisión

Curso: 4 Eso

Solución del ejercicio 1

a. Numerador: $2^{5-3} = 2^2$. Cociente: $2^{2-4} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$. Al multiplicar potencias de la misma base sumamos los exponentes y al dividir los restamos; el exponente negativo indica el inverso.

b. $(3^2)^3 = 3^6$; numerador $3^{6-4} = 3^2$; cociente $3^{2-5} = 3^{-3} = \frac{1}{27}$. La potencia de una potencia se calcula multiplicando los exponentes: $2 \cdot 3 = 6$. Respuesta: $\frac{1}{27}$.

c. Se suman exponentes: $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3+2} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-1} = \frac{5}{2}$. Elevar a -1 es lo mismo que invertir la fracción. Respuesta: $\frac{5}{2}$.

d. $6^4 = 2^4 \cdot 3^4$, luego el cociente es $\frac{2^4 \cdot 3^4}{2^4 \cdot 3^2} = 3^2 = 9$. Descomponemos 6 en factores primos para poder simplificar con el denominador. Respuesta: 9.

Solución del ejercicio 2

a. $2^{-4} = \frac{1}{16}$ y $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 3^2 = 9$. Un exponente negativo indica el inverso de la potencia: $2^{-4} = \frac{1}{2^4}$, y al invertir $\frac{1}{3}$ obtenemos 3.

b. $25^{1/2} = \sqrt{25} = 5$. $27^{2/3} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^2 = 3^2 = 9$. El denominador del exponente es el índice de la raíz y el numerador, la potencia. Conviene hacer primero la raíz para trabajar con números pequeños.

c. $16^{-3/4} = \frac{1}{16^{3/4}} = \frac{1}{\left(\sqrt[4]{16}\right)^3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$. La raíz cuarta de 16 es 2 porque $2^4 = 16$; después elevamos al cubo y aplicamos el signo negativo del exponente.

d. $\sqrt[3]{-64} = -4$ porque $(-4)^3 = -64$. $(-8)^{2/3} = \left(\sqrt[3]{-8}\right)^2 = (-2)^2 = 4$. Las raíces de índice impar admiten radicandos negativos. Respuesta: -4 y 4.

Solución del ejercicio 3

a. $72 = 2^3 \cdot 3^2$, luego $\sqrt{72} = 3 \cdot 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$. $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$, luego $\sqrt{180} = 6\sqrt{5}$. Descomponemos el radicando en factores primos y sacamos de la raíz cada factor elevado al índice. Comprobación: $(6\sqrt{2})^2 = 72$.

b. $54 = 2 \cdot 3^3$: $\sqrt[3]{54} = 3\sqrt[3]{2}$. $128 = 2^7 = 2^6 \cdot 2$: $\sqrt[3]{128} = 4\sqrt[3]{2}$. En las raíces cúbicas sacamos los factores elevados al cubo: $3^3 = 27$ y $2^6 = (2^2)^3$. Comprobación: $(3\sqrt[3]{2})^3 = 54$.

c. $5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$. Primero simplificamos cada raíz: $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$, $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$; después sumamos como radicales semejantes.

d. $\sqrt{12 \cdot 27} = \sqrt{324} = 18$ (o $2\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} = 6 \cdot 3 = 18$). Podemos multiplicar los radicandos porque tienen el mismo índice. Respuesta: 18.

Solución del ejercicio 4

a. Índice común 6: $\sqrt[6]{2^3} \cdot \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{2^5}$ (es decir $2^{5/6}$). Para multiplicar raíces de distinto índice las pasamos a índice común, el mínimo común múltiplo de 2 y 3, que es 6.

b. $\sqrt{\dfrac{75}{3}} = \sqrt{25} = 5$. Dividimos los radicandos dentro de una sola raíz porque tienen el mismo índice. Respuesta: 5.

c. Es suma por diferencia: $5 - 2 = 3$. La suma por diferencia da la diferencia de cuadrados, y $(\sqrt{5})^2 = 5$. Respuesta: 3.

d. $9 - 6\sqrt{2} + 2 = 11 - 6\sqrt{2}$. Aplicamos el cuadrado de una diferencia: $3^2 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2$. Respuesta: $11 - 6\sqrt{2}$.

Solución del ejercicio 5

a. $\dfrac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$. Multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{3}$ para que desaparezca la raíz del denominador. Respuesta: $2\sqrt{3}$.

b. Multiplicamos por $\sqrt[3]{2^2}$: $\dfrac{4\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4}} = \dfrac{4\sqrt[3]{4}}{2} = 2\sqrt[3]{4}$. Buscamos completar un cubo en el denominador: $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{8} = 2$.

c. Multiplicamos por el conjugado: $\dfrac{5(\sqrt{7} + \sqrt{2})}{7 - 2} = \sqrt{7} + \sqrt{2}$. El conjugado de $\sqrt{7} - \sqrt{2}$ es $\sqrt{7} + \sqrt{2}$; el producto da $7 - 2 = 5$, que simplifica con el 5 del numerador.

d. $\dfrac{2(3-\sqrt{5})}{9-5} = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$. El conjugado de $3+\sqrt{5}$ es $3-\sqrt{5}$; el denominador queda $9-5=4$ y simplificamos entre 2.

Solución del ejercicio 6

a. $4{,}5 \cdot 10^{7}$ y $7{,}3 \cdot 10^{-5}$. Movemos la coma hasta dejar una sola cifra distinta de cero a su izquierda: 7 lugares a la izquierda y 5 a la derecha.
b. $3{,}2 \cdot 2{,}5 = 8$ y $10^{5-3} = 10^{2}$: $8 \cdot 10^{2} = 800$. Multiplicamos las mantisas y sumamos los exponentes de las potencias de 10. Respuesta: $8 \cdot 10^{2}$.
c. $\dfrac{9}{4} = 2{,}25$ y $10^{8-(-2)} = 10^{10}$: $2{,}25 \cdot 10^{10}$. Dividimos las mantisas y restamos los exponentes; restar -2 es sumar 2. Respuesta: $2{,}25 \cdot 10^{10}$.
d. Igualamos potencias: $61 \cdot 10^{6} + 3{,}9 \cdot 10^{6} = 64{,}9 \cdot 10^{6} = 6{,}49 \cdot 10^{7}$. Para sumar en notación científica escribimos los dos números con la misma potencia de 10. Respuesta: $6{,}49 \cdot 10^{7}$.

Solución del ejercicio 7

a. $t = \dfrac{1{,}496 \cdot 10^{8}}{3 \cdot 10^{5}} \approx 0{,}4987 \cdot 10^{3} \approx 4{,}99 \cdot 10^{2}$ s. El tiempo es la distancia dividida entre la velocidad; dividimos mantisas y restamos exponentes.
b. $498{,}7 : 60 \approx 8{,}3$ minutos. Dividimos los segundos entre 60. Respuesta: unos 8,3 minutos.
c. $\dfrac{4{,}0 \cdot 10^{13}}{1{,}496 \cdot 10^{8}} \approx 2{,}67 \cdot 10^{5}$ veces. Dividimos las dos distancias. Respuesta: unas 267 000 veces.
d. $t = \dfrac{4{,}0 \cdot 10^{13}}{3 \cdot 10^{5}} = 1{,}33 \cdot 10^{8}$ s. En años: $\dfrac{1{,}33 \cdot 10^{8}}{3{,}15 \cdot 10^{7}} \approx 4{,}2$ años. Primero calculamos los segundos y después los pasamos a años. Respuesta: unos 4,2 años.

Solución del ejercicio 8

a. $B(n) = 500 \cdot 2^{n}$. Cada periodo de 20 minutos el número se multiplica por 2.
b. $500;\ 1000;\ 2000;\ 4000;\ 8000$. Cada valor es el doble del anterior.
c. 3 horas son 9 periodos: $500 \cdot 2^{9} = 500 \cdot 512 = 256\,000 = 2{,}56 \cdot 10^{5}$. Una hora tiene 3 periodos de 20 minutos, así que en 3 horas hay 9. Respuesta: 256 000 bacterias.
d. $500 \cdot 2^{n} > 10^{6}$ equivale a $2^{n} > 2000$. Como $2^{10} = 1024$, hacen falta 11 periodos (3 h 40 min). Respuesta: 11 periodos, es decir, 3 horas y 40 minutos.

Solución del ejercicio 9

a. $1\ \text{TB} = 2^{10}\cdot 2^{10}\cdot 2^{10}\cdot 2^{10} = 2^{40} \approx 1{,}10\cdot 10^{12}$ bytes. Multiplicamos cuatro veces por 2^{10}, sumando los exponentes.

b. $4\ \text{MB} = 2^2\cdot 2^{20} = 2^{22}$ bytes. Caben $\dfrac{2^{40}}{2^{22}} = 2^{18} = 262\,144$ fotos. Pasamos los 4 MB a bytes y dividimos potencias de la misma base restando exponentes.

c. $\dfrac{2^{40}}{2^{32}} = 2^8 = 256$ películas. Restamos los exponentes: $40-32=8$.

d. $2^{40} - 10^{12} = 1\,099\,511\,627\,776 - 10^{12} \approx 9{,}95\cdot 10^{10}$ bytes, que es $\approx 9{,}95\ \%$ de 10^{12}. Respuesta: casi un 10 % más.

Solución del ejercicio 10

a. $h^2 = 5^2 - 1{,}5^2 = 25 - 2{,}25 = 22{,}75$, luego $h = \sqrt{22{,}75} = \dfrac{\sqrt{91}}{2}$ m. La escalera es la hipotenusa del triángulo rectángulo formado con la pared y el suelo.

b. $\sqrt{91} \approx 9{,}539$ y $h \approx 4{,}77$ m. Respuesta: la escalera llega a unos 4,77 m.

c. $h^2 = 25 - 6{,}25 = 18{,}75$, $h = \sqrt{18{,}75} = \dfrac{5\sqrt{3}}{2} \approx 4{,}33$ m. El cateto horizontal ahora mide 2,5 m.

d. $4{,}77 - 4{,}33 \approx 0{,}44$ m. Restamos las dos alturas. Respuesta: baja unos 44 cm.

Solución del ejercicio 11

a. $l = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ m.

b. $3\sqrt{2} \approx 4{,}243$ m, es decir unos 424 cm.

c. $d = l\sqrt{2} = 3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 6$ m.

d. El lado $4{,}24$ m es mayor que el ancho de 4 m, luego no cabe de lado en la primera habitación. La diagonal mide 6 m, que es mayor que 5 m: tampoco cabe en diagonal.

Solución del ejercicio 12

a. $C(n) = 2000\cdot 1{,}03^n$.

b. 1 año: $2060{,}00$ €; 2 años: $2121{,}80$ €; 5 años: $2318{,}55$ €; 10 años: $2687{,}83$ €.

c. Con 7 años: $2459{,}75$ € y con 8 años: $2533{,}54$ €. Hacen falta 8 años.

d. Con el $4\ \%$: $2000\cdot 1{,}04^{10} = 2960{,}49$ €. Diferencia: $2960{,}49 - 2687{,}83 = 272{,}66$ €.

Solución del ejercicio 13

a. Décimas: $2{,}6$. Centésimas: $2{,}65$. Para redondear miramos la cifra siguiente a la última que conservamos.
b. $|2{,}6457513 - 2{,}6| = 0{,}0457513$ y $|2{,}6457513 - 2{,}65| = 0{,}0042487$. El error absoluto es el valor absoluto de la diferencia con el valor exacto.
c. $\dfrac{0{,}0042487}{2{,}6457513} \approx 0{,}0016 = 0{,}16\,\%$. Dividimos el error absoluto entre el valor exacto.
d. Área exacta 7; área aproximada $2{,}65^2 = 7{,}0225$. Error: $0{,}0225$ cm^2. Respuesta: el error en el área es de 0,0225 cm^2.

Solución del ejercicio 14

a. $m(n) = 80 \cdot 2^{-n}$. Cada periodo la masa se multiplica por $\dfrac{1}{2} = 2^{-1}$.
b. 6 h ($n = 1$): 40 mg; 12 h ($n = 2$): 20 mg; 24 h ($n = 4$): 5 mg; 36 h ($n = 6$): $1{,}25$ mg. Cada 6 horas es un periodo más.
c. $80 \cdot 2^{-n}$ equivale a $2^n > 80$: $2^6 = 64$, luego $n = 7$, es decir 42 horas.
d. 48 h son $n = 8$ periodos: $80 \cdot 2^{-8} = \dfrac{80}{256} = 0{,}3125 = 3{,}125 \cdot 10^{-1}$ mg. Respuesta: unos 0,31 mg.

Solución del ejercicio 15

a. $V = \dfrac{27\,000}{1000} = 27$ m^3 y $a = \sqrt[3]{27} = 3$ m.
b. $A = 6a^2 = 6 \cdot 9 = 54$ m^2.
c. $V = 50$ m^3, $a = \sqrt[3]{50} \approx 3{,}68$ m (sin raíz exacta, 50 no es cubo perfecto).
d. $A = 6 \cdot \sqrt[3]{50}^{\,2} = 6 \cdot 13{,}57 \approx 81{,}4$ m^2 y el coste es $81{,}43 \cdot 3{,}50 \approx 285{,}01$ €.
e. $\dfrac{50}{27} \approx 1{,}85$ veces. La arista no es el doble ($3{,}68$): para duplicar la arista, el volumen se multiplica por $2^3 = 8$.

Solución del ejercicio 16

a. España: $4{,}8 \cdot 10^7$; mundo: $8{,}0 \cdot 10^9$; Madrid ciudad: $3{,}3 \cdot 10^6$; Soria provincia: $8{,}8 \cdot 10^4$. Movemos la coma hasta dejar una cifra delante.
b. $\dfrac{8{,}0 \cdot 10^9}{4{,}8 \cdot 10^7} \approx 1{,}67 \cdot 10^2$, unas 167 veces. Dividimos las mantisas y restamos exponentes.

c. $\dfrac{4{,}8 \cdot 10^7}{8 \cdot 10^9} = 0{,}006 = 0{,}6\,\%$. Dividimos la población de España entre la mundial.
d. $4{,}8 \cdot 10^7 \cdot 1{,}0511 \approx 5{,}05 \cdot 10^7$ habitantes. Multiplicamos por el factor de crecimiento de 10 años. Respuesta: unos 50,5 millones de habitantes.

Solución del ejercicio 17

a. 4K: $3840 \cdot 2160 = 8\,294\,400 \approx 8{,}29 \cdot 10^6$. Full HD: $1920 \cdot 1080 = 2\,073\,600 \approx 2{,}07 \cdot 10^6$.
b. $\dfrac{8\,294\,400}{2\,073\,600} = 4$ veces: cada dimensión se duplica y $2 \cdot 2 = 4$.
c. $8\,294\,400 \cdot 3 = 24\,883\,200$ bytes $\approx 24{,}9$ MB.
d. Imágenes: $90 \cdot 60 \cdot 24 = 129\,600$. Bytes: $129\,600 \cdot 24\,883\,200 \approx 3{,}22 \cdot 10^{12}$, es decir unos $3{,}2$ TB.
e. Porque se comprime: se aprovecha que imágenes consecutivas son muy parecidas y que el ojo no distingue ciertos detalles.

Solución del ejercicio 18

a. $\mathrm{pH} = -\log 10^{-7} = 7$: neutro. El logaritmo de una potencia de 10 es su exponente.
b. Limón: $\mathrm{pH} = 2$ (ácido). Bicarbonato: $\mathrm{pH} = 9$ (básico). Un pH menor que 7 indica una sustancia ácida y mayor que 7, básica.
c. Vinagre: $[\mathrm{H}^+] = 10^{-3}$; el agua 10^{-7}. Cociente $\dfrac{10^{-3}}{10^{-7}} = 10^4 = 10\,000$ veces mayor.
d. $\log_2 32 = 5$ porque $2^5 = 32$. $\log_3 \dfrac{1}{9} = -2$ porque $3^{-2} = \dfrac{1}{9}$. $\log_{10} 0{,}001 = -3$.

Solución del ejercicio 19

a. $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ m y $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ m.
b. $h^2 = 8 + 18 = 26$, luego $h = \sqrt{26} \approx 5{,}10$ m (no se puede simplificar).
c. $P = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + \sqrt{26} = 5\sqrt{2} + \sqrt{26} \approx 7{,}07 + 5{,}10 = 12{,}17$ m.
d. $A = \dfrac{2\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2}}{2} = \dfrac{6 \cdot 2}{2} = 6$ m^2. Coste $6 \cdot 4{,}50 = 27$ €.
e. El camino ocupa parte del triángulo, por lo que el césped solo cubre lo que queda: área menor que 6 m^2.

Solución del ejercicio 20

a. $\dfrac{2^n(4-1)}{2^n \cdot 2} = \dfrac{3}{2}$. Sacamos factor común 2^n en el numerador y simplificamos. Respuesta: $\dfrac{3}{2}$.

b. Multiplicando por el conjugado: $\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(n+1)-n} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$. La suma se simplifica: $(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(2-\sqrt{3}) = 2-1 = 1$. Los términos intermedios se anulan dos a dos. Respuesta: la suma vale 1.

c. Índice 6: $\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{9}$ y $\sqrt{2} = \sqrt[6]{8}$. Como $9 > 8$, $\sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$. Elevamos cada radicando para llevarlo a índice 6.

d. $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \dfrac{1}{x^2} = 9$, luego $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = 7$. Elevamos al cuadrado la igualdad y despejamos. Respuesta: 7.