Apuntes - Expresiones algebraicas y factorización

Curso: 4 Eso

En este tema aprenderás: polinomios: repaso y operaciones, división de polinomios y regla de Ruffini, identidades notables, factorización de polinomios, fracciones algebraicas y ecuaciones no lineales sencillas (Matemáticas B). Cada idea va en un cuadro de color, con ejemplos resueltos paso a paso.

Actividad de introducción: las baldosas del salón

Una familia de Zaragoza quiere embaldosar un salón rectangular cuyo largo mide 2 metros más que su ancho x. El área es $x(x+2) = x^2 + 2x$ y el perímetro $4x + 4$. Pregúntate: ¿cuántos metros cuadrados hay que comprar si $x = 4$? ¿Qué pasa si se añade una alfombra de 1 m de ancho alrededor? Cuando las medidas dependen de una letra, los resultados son **expresiones algebraicas**, y cuando esas expresiones solo contienen sumas, restas y productos de potencias de x se llaman **polinomios**. Saber operar con ellos, dividirlos y factorizarlos permite resolver ecuaciones, simplificar fracciones y optimizar medidas, desde el volumen de una caja hasta los beneficios de un negocio.

Polinomios: repaso y operaciones

Definición: polinomio

Un **polinomio** en la variable x es una expresión $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. El mayor exponente n con coeficiente distinto de cero es el **grado**. El **valor numérico** en $x = a$ es $P(a)$: se sustituye y se calcula. Por ejemplo, si $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 5$, entonces $P(2) = 16 - 12 + 2 - 5 = 1$.

Regla

Para sumar o restar se agrupan los términos semejantes (mismo exponente): $(3x^2 - 2x + 1) + (x^2 + 5x - 4) = 4x^2 + 3x - 3$. Para multiplicar se aplica la propiedad distributiva y después se reducen términos: $(x - 3)(2x^2 + x - 1) = 2x^3 + x^2 - x - 6x^2 - 3x + 3 = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$. El grado del producto es la suma de los grados.

División de polinomios y regla de Ruffini

Propiedad

Dividir $P(x)$ entre $Q(x)$ da un cociente $C(x)$ y un resto $R(x)$ con $P = Q \cdot C + R$, donde el grado de R es menor que el de Q. Cuando el divisor es de la forma $x - a$, se usa la **regla de Ruffini**: se escriben los coeficientes de P, se baja el primero, y cada resultado se multiplica por a y se suma al siguiente coeficiente.

Ejemplo 1

Dividir $x^3 + 2x^2 - 5x + 1$ entre $x - 2$. Coeficientes: 1, 2, -5, 1 con $a = 2$. Se baja 1; $2 \cdot 1 = 2$, $2 + 2 = 4$; $2 \cdot 4 = 8$, $-5 + 8 = 3$; $2 \cdot 3 = 6$, $1 + 6 = 7$. Cociente $x^2 + 4x + 3$ y resto 7.

Definición: teorema del resto

El **teorema del resto** afirma que el resto de dividir $P(x)$ entre $x - a$ es $P(a)$. Si el resto es 0, $x - a$ es un factor de P y a es una **raíz** ($P(a) = 0$). Esto se llama **teorema del factor**.

Identidades notables

Propiedad: identidades notables

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Sirven para desarrollar rápido y, leídas al revés, para factorizar: $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$ y $4x^2 - 25 = (2x - 5)(2x + 5)$.

Factorización de polinomios

Método: factorización de polinomios

Factorizar es escribir el polinomio como producto de polinomios de menor grado. Se sigue este orden:

1. **Sacar factor común**: $6x^3 - 9x^2 + 3x = 3x(2x^2 - 3x + 1)$.
2. **Identidades notables** cuando encajan: $x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$.
3. **Raíces enteras con Ruffini**: las posibles raíces enteras son divisores del término independiente. Se prueba cada una; si el resto es 0, se factoriza y se repite con el cociente.
4. En los de grado 2 que quedan, se resuelve $ax^2 + bx + c = 0$ y se usa $a(x - x_1)(x - x_2)$.

Ejemplo 2

Factorizar $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$. Divisores de -6: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. $P(1) = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$, luego $x - 1$ es factor. Ruffini con $a = 1$: coeficientes 1, -6, 11, -6 dan 1, -5, 6 y resto 0. El cociente $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$. Resultado: $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$.

Ejemplo 3

Factorizar $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$. $P(2) = 16 - 12 - 6 + 2 = 0$. Ruffini con 2: 2, 1, -1, resto 0. El cociente $2x^2 + x - 1$ tiene raíces $x = \frac{-1 \pm 3}{4}$, es decir, $\frac{1}{2}$ y -1. Entonces $P(x) = (x - 2)(2x - 1)(x + 1)$.

Fracciones algebraicas

Definición: fracción algebraica

Una **fracción algebraica** es un cociente de polinomios. Se simplifica factorizando numerador y denominador y eliminando los factores comunes, siempre indicando los valores que anulan el denominador: $\frac{x^2 - 9}{x^2 - 6x + 9} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{(x - 3)^2} = \frac{x + 3}{x - 3}$ con $x \neq 3$. Para sumar se reduce a común denominador con el mcm de los denominadores: $\frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x + 1} = \frac{(x + 1) + (x - 1)}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{2x}{x^2 - 1}$. Para multiplicar se multiplican numeradores y denominadores, y para dividir se multiplica por la inversa.

Ejemplo 4: simplificar una fracción algebraica

Simplifica $\frac{x^2 - 9}{x^2 + x - 6}$.

Factoriza: $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$ y $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$. Simplificando el factor común, $\frac{x - 3}{x - 2}$, válido para $x \neq -3$ y $x \neq 2$.

Ecuaciones no lineales sencillas (Matemáticas B)

Propiedad

Factorizar permite resolver ecuaciones de grado mayor que 2: si $P(x) = 0$ y $P = (x - a)(x - b)(x - c)$, las soluciones son a, b y c, porque un producto es cero cuando algún factor lo es. En una **ecuación bicuadrada** $x^4 + bx^2 + c = 0$ se hace el cambio $t = x^2$, se resuelve la cuadrática en t y después se deshace con $x = \pm\sqrt{t}$ (solo para $t \geq 0$). Ejemplo: $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$; con $t = x^2$: $t^2 - 5t + 4 = 0$, $t = 1$ o $t = 4$, luego $x = \pm 1$ o $x = \pm 2$.

¡Atención! Errores frecuentes

- Escribir $(a+b)^2 = a^2 + b^2$, olvidando el doble producto.
- Simplificar términos en lugar de factores: $\frac{x+3}{3}$ no es igual a $x+1$.
- Olvidar el término de coeficiente 0 en Ruffini (por ejemplo, en $x^3 - 4x + 5$ se escribe 1, 0, -4, 5).
- No indicar los valores que anulan el denominador al simplificar.

Raíces, teorema del factor y búsqueda de raíces enteras

Teorema del factor

Un número a es raíz de $P(x)$ si y solo si $P(a) = 0$, y esto ocurre si y solo si $(x - a)$ divide exactamente a $P(x)$, es decir, si el resto de la división es cero. Si $P(x)$ tiene coeficientes enteros, sus raíces enteras son divisores del término independiente. Esto reduce la búsqueda a unos pocos candidatos.

Método: factorizar un polinomio con raíces enteras

1. Saca factor común si lo hay.
2. Escribe los divisores del término independiente, con signo positivo y negativo.
3. Prueba cada divisor a calculando $P(a)$, o directamente con Ruffini, hasta encontrar un resto 0.
4. Sustituye $P(x)$ por $(x - a) \cdot C(x)$ y repite el proceso con el cociente $C(x)$.
5. Cuando el cociente sea de segundo grado, factorízalo con la fórmula o con una identidad notable.
6. Comprueba multiplicando los factores.

Ejemplo 4

Factoriza $x^3 - 7x + 6$.

No hay término en x^2, así que los coeficientes son $1, 0, -7, 6$. Divisores de 6: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. $P(1) = 1 - 7 + 6 = 0$, luego 1 es raíz. Ruffini con raíz 1: $1;\ 1;\ -6;\ 0$, cociente $x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$. Resultado: $(x-1)(x-2)(x+3)$.

¡Atención! Errores al factorizar y operar

- En Ruffini hay que escribir un 0 por cada potencia que falte: para $x^3 - 7x + 6$ los coeficientes son $1, 0, -7, 6$.
- No se puede «tachar» un sumando entre numerador y denominador: en $\dfrac{x+2}{x}$ no se puede simplificar la x. Solo se simplifican factores.
- Al restar fracciones hay que cambiar el signo de todo el numerador que se resta:

$$\frac{A}{D} - \frac{B-1}{D} = \frac{A-B+1}{D}.$$

- Una ecuación bicuadrada puede tener cuatro soluciones, pero hay que descartar las que den $z = x^2$.

Fracciones algebraicas: operar y resolver ecuaciones

Regla: operaciones con fracciones algebraicas

- Para **sumar o restar** se factorizan los denominadores, se calcula el mínimo común múltiplo y se reduce a común denominador.
- Para **multiplicar** se multiplican numeradores y denominadores y se simplifican factores comunes.
- Para **dividir** se multiplica por la fracción inversa.
- El resultado solo es válido para los valores de x que no anulan ningún denominador.

Ejemplo 5

Resuelve $\frac{3}{x} - \frac{2}{x+1} = 1$**.**

mcm $= x(x+1)$. Multiplicamos por él: $3(x+1) - 2x = x(x+1)$, es decir $x + 3 = x^2 + x$, luego $x^2 = 3$ y $x = \pm\sqrt{3}$. Ninguna solución anula un denominador, así que valen las dos.

Aplicación: resolver ecuaciones con fracciones

Para resolver una ecuación con fracciones algebraicas se multiplica toda la ecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores, se resuelve la ecuación polinómica que resulta y se comprueba cada solución en la ecuación original, porque a veces aparece una raíz que anula un denominador y hay que descartarla.

Ejemplo 6

Resuelve $\frac{x^2-1}{x-1} = 4$**.**

Se simplifica $\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$ (con $x \neq 1$). Entonces $x + 1 = 4$ y $x = 3$, que cumple $x \neq 1$.

Estrategia para resolver problemas con polinomios

Cuando un enunciado habla de áreas, volúmenes o beneficios, sigue siempre el

mismo camino: asigna la letra x a la medida desconocida, escribe cada magnitud como polinomio, desarrolla con las identidades notables, plantea la ecuación y factorízala. Después descarta las soluciones negativas o que no cumplan las condiciones del enunciado y comprueba el resultado calculando de nuevo las áreas o los volúmenes con los números obtenidos. Esta comprobación final evita casi todos los errores de signo.

¿Sabías que?

La regla de Ruffini lleva el nombre del matemático italiano Paolo Ruffini, que la publicó en 1809, aunque ya se conocía una idea parecida en China siglos antes. Ruffini estudió también las ecuaciones de quinto grado y fue de los primeros en sospechar que no existe una fórmula general para resolverlas con raíces, algo que demostró más tarde el noruego Niels Henrik Abel. Hoy los programas de cálculo siguen usando estas ideas para factorizar polinomios enormes en milésimas de segundo.

Orden para factorizar sin perderse

Método: los cuatro pasos de la factorización

1. Saca factor común todo lo que puedas: números y potencias de x.
2. Mira si lo que queda es una identidad notable: diferencia de cuadrados o cuadrado de una suma o de una diferencia.
3. Si es de segundo grado y no es identidad notable, resuelve la ecuación con la fórmula y escribe $a(x-x_1)(x-x_2)$.
4. Si el grado es tres o más, busca raíces enteras entre los divisores del término independiente y aplica Ruffini hasta llegar a un cociente de segundo grado.

Ejemplo 7

Factoriza $2x^3-8x$.

Primero sacamos factor común $2x$: $2x^3-8x=2x(x^2-4)$. El paréntesis es una diferencia de cuadrados, x^2-2^2, así que $x^2-4=(x-2)(x+2)$. Por tanto $2x^3-8x=2x(x-2)(x+2)$, y las raíces son 0, 2 y -2. Comprobamos con $x=1$: $2-8=-6$ y $2\cdot 1\cdot(-1)\cdot 3=-6$.

El consejo de Otto

Si el término independiente es 6, solo hace falta probar $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$. ¡Es una lista corta y segura!