Ejercicios - Expresiones algebraicas y factorización

Curso: 4 Eso · 20

Se debe mostrar el desarrollo de cada ejercicio.

Ejercicio 1

Ejercicio 1 – Valor numérico y operaciones

Sean $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 5$ y $Q(x) = x^2 - 4x + 3$.

a. Calcula $P(2)$ y $P(-1)$.
b. Calcula $P(x) + Q(x)$ y $P(x) - 2Q(x)$.
c. Indica el grado de $P(x) \cdot Q(x)$, su coeficiente de x^5 y su término independiente.
d. ¿Es $x = 3$ una raíz de $Q(x)$? ¿Y de $P(x)$?

Ejercicio 2

Ejercicio 2 – Identidades notables

Desarrolla con las identidades notables.

a. $(3x - 2)^2$ y $(x + 5)(x - 5)$
b. $(2x + 3y)^2$
c. $(x - 1)^3$
d. $(x + 2)^2 - (x - 2)^2$ (simplifica el resultado)

Ejercicio 3

Ejercicio 3 – Factor común e identidades

Factoriza completamente.

a. $6x^3 - 9x^2$ y $10x^2y - 15xy^2$
b. $x^2 - 49$ y $9x^2 - 4$
c. $4x^2 + 12x + 9$ y $x^2 - 10x + 25$
d. $x^4 - 16$

Ejercicio 4

Ejercicio 4 – División de polinomios

Efectúa cada división indicando cociente y resto.

a. $(x^3 + 2x^2 - 5x + 1) : (x - 2)$ con la regla de Ruffini

b. $(2x^3 - x^2 + 3x - 4) : (x^2 + 1)$
c. $(x^4 - 1) : (x + 1)$
d. Comprueba el primer resultado con la prueba de la división.

Ejercicio 5

Ejercicio 5 – Teorema del resto

Sea $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$.

a. Calcula el resto de dividir $P(x)$ entre $x - 1$ y entre $x + 2$ sin dividir.
b. Comprueba que $x = 3$ y $x = -1$ son raíces.
c. Divide $P(x)$ entre $x - 3$ con Ruffini.
d. Escribe $P(x)$ factorizado.

Ejercicio 6

Ejercicio 6 – Factorizar con raíces enteras

Busca las raíces entre los divisores del término independiente y factoriza.

a. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$
b. $x^3 + 2x^2 - x - 2$
c. $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$
d. $x^4 - 5x^2 + 4$

Ejercicio 7

Ejercicio 7 – Simplificar fracciones algebraicas

Simplifica e indica los valores de x para los que no está definida la fracción original.

a. $\dfrac{x^2 - 9}{x^2 + 6x + 9}$
b. $\dfrac{2x^2 - 8}{x^2 - 4x + 4}$
c. $\dfrac{x^3 - x}{x^2 - 2x + 1}$
d. $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - x - 6}$

Ejercicio 8

Ejercicio 8 – Operar con fracciones algebraicas

Efectúa y simplifica.

a. $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x+1}$
b. $\dfrac{x+1}{x-2}-\dfrac{x-3}{x+2}$
c. $\dfrac{x^2-4}{x}\cdot\dfrac{x^2}{x+2}$
d. $\dfrac{x}{x+2}:\dfrac{x^2}{x^2-4}$

Ejercicio 9

Ejercicio 9 – La finca de Extremadura

Un agricultor de Extremadura tiene una finca rectangular de lados $(x+4)$ m y $(x+1)$ m.

a. Escribe el área $A(x)$ y el perímetro $P(x)$ como polinomios.
b. Calcula área y perímetro para $x=6$.
c. ¿Cuánto vale x si el área es de 130 m^2? (Resuelve la ecuación factorizando.)
d. ¿Cuánta valla hace falta en ese caso?

Ejercicio 10

Ejercicio 10 – La caja de cartón

Con una lámina de cartón de 40 cm por 30 cm se construye una caja sin tapa recortando un cuadrado de lado x en cada esquina y doblando los lados.

x (cm)	3	4	5	6	7
V (cm³)	?	?	?	?	?

a. Escribe las dimensiones de la caja y el volumen $V(x)$ como polinomio.
b. Completa la tabla de volúmenes para $x=3,4,5,6,7$.
c. ¿Para cuál de esos valores es máximo el volumen?
d. Para $x=5$, calcula las dimensiones y la capacidad en litros.

Ejercicio 11

Ejercicio 11 – El marco del cuadro

Un cuadro rectangular de 60 cm por 40 cm lleva un marco de anchura x cm por todos sus lados.

a. Escribe el área total del cuadro con marco, $(60+2x)(40+2x)$, desarrollada.
b. Escribe el área del marco como polinomio.
c. Calcula el área del marco para $x=3$ cm.
d. El marco ocupa 864 cm^2. Plantea la ecuación y calcula x.

Ejercicio 12

Ejercicio 12 – Beneficios de una pastelería

Una pastelería de Sevilla calcula su beneficio mensual (en cientos de euros) al vender x docenas de pasteles con $B(x) = -x^2 + 40x - 300$.

a. Factoriza $B(x) = -(x - 10)(x - 30)$ y comprueba el resultado.
b. ¿Cuántas docenas hay que vender para no tener pérdidas ni beneficios?
c. Calcula $B(20)$ e interpreta. ¿Es mayor que $B(19)$ y que $B(21)$?
d. ¿Para qué valores de x el beneficio es positivo?

Ejercicio 13

Ejercicio 13 – El saque de banda

En un partido de fútbol, un jugador lanza el balón con las manos desde la banda. La altura del balón en metros, t segundos después del lanzamiento, es $h(t) = -5t^2 + 15t$.

a. Factoriza $h(t)$.
b. ¿Cuándo toca el balón el suelo?
c. Calcula $h(1)$, $h(1{,}5)$ y $h(2)$.
d. ¿Cuál es la altura máxima? (Usa que el máximo está en el punto medio de las raíces.)

Ejercicio 14

Ejercicio 14 – El camino del jardín

Un jardín cuadrado de lado x metros se rodea de un camino de 2 m de anchura.

a. Escribe el lado del cuadrado exterior y el área del camino como polinomio.
b. Calcula el área del camino si $x = 10$ m y el coste de pavimentarlo a 12 €/m^2.
c. Si el camino ocupa 144 m^2, ¿cuánto mide el lado del jardín?
d. Comprueba el resultado calculando las dos áreas.

Ejercicio 15

Ejercicio 15 – La piscina con andén

Una urbanización de Alicante construye una piscina rectangular de 10 m por 5 m y la rodea de un andén de baldosas de anchura x metros. La tabla recoge el área del andén para varias anchuras.

x (m)	0,5	1	1,5	2
A (m²)	?	?	?	?

a. Escribe el área total $(10 + 2x)(5 + 2x)$ y el área del andén $A(x)$ como polinomios.
b. Completa la tabla de $A(x)$ para $x = 0{,}5;\ 1;\ 1{,}5;\ 2$.

c. Factoriza $A(x)$ sacando factor común.
d. Se dispone de baldosas para cubrir 60 m^2. Plantea la ecuación y calcula x con dos decimales.
e. El andén cuesta 25 €/m^2. ¿Cuánto cuesta uno de 1 m de anchura?

Ejercicio 16

Ejercicio 16 – El prisma de volumen polinómico

El volumen de un prisma rectangular, en cm^3, es $V(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$, donde x es un número natural. La base tiene área $B(x) = x^2 + 3x + 2$.

a. Comprueba que $x = -1$ es raíz de $V(x)$ y factoriza $V(x)$ con Ruffini.
b. Halla la altura del prisma dividiendo $V(x)$ entre $B(x)$.
c. Escribe las dimensiones para $x = 2$ y comprueba el volumen.
d. ¿Para qué valor de x el volumen es 210 cm^3?
e. Calcula también x si el volumen es 504 cm^3 y razona si es posible un volumen de 100 cm^3.

Ejercicio 17

Ejercicio 17 – El ciclista de la Vía Verde

Un ciclista recorre 60 km de ida por una vía verde de Girona a una velocidad x km/h y vuelve por el mismo camino a $(x + 5)$ km/h.

a. Escribe el tiempo total $T(x) = \dfrac{60}{x} + \dfrac{60}{x+5}$ como una sola fracción.
b. Calcula $T(15)$ y $T(20)$.
c. Si el tiempo total ha sido de 7 horas, plantea la ecuación y comprueba que $x = 15$ la verifica.
d. ¿Cuál es la velocidad media de todo el viaje en el caso anterior?

Ejercicio 18

Ejercicio 18 – Ecuaciones bicuadradas (Matemáticas B)

Resuelve cada ecuación con el cambio $z = x^2$.

a. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$
b. $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$
c. $x^4 + x^2 + 1 = 0$ (razona si tiene solución real)
d. Un rectángulo tiene área 12 cm^2 y diagonal 5 cm. Plantea una bicuadrada para su lado menor y resuélvela.

Ejercicio 19

Ejercicio 19 – Los dos grifos

Un depósito de agua de una finca de Albacete se llena con un grifo A en x horas y con un grifo B en $(x+3)$ horas. Abiertos los dos a la vez, tardan 2 horas en llenarlo.

a. ¿Qué fracción del depósito llena cada grifo en una hora?
b. Plantea la ecuación $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}=\frac{1}{2}$.
c. Resuélvela y descarta la solución que no tiene sentido.
d. ¿Cuánto tarda cada grifo por separado? Comprueba la respuesta.

Ejercicio 20

Ejercicio 20 – Desafío algebraico

Resuelve estos retos de factorización.

a. Factoriza x^4+4 sumando y restando $4x^2$.
b. Halla k para que $x-2$ divida a x^3+kx^2-4x+4.
c. Simplifica $\frac{x^3-8}{x^2-4}$.
d. Demuestra que n^3-n es siempre múltiplo de 6 para todo entero n.