Soluciones - Expresiones algebraicas y factorización

Curso: 4 Eso

Solución del ejercicio 1

a. $P(2) = 16 - 12 + 2 - 5 = 1$ y $P(-1) = -2 - 3 - 1 - 5 = -11$. Sustituimos cada valor cuidando los signos de las potencias.
b. $P + Q = 2x^3 - 2x^2 - 3x - 2$.
$P - 2Q = 2x^3 - 3x^2 + x - 5 - 2x^2 + 8x - 6 = 2x^3 - 5x^2 + 9x - 11$. Al restar $2Q$ cambiamos el signo de los tres términos de $2Q$.
c. Grado $3 + 2 = 5$. Coeficiente de x^5: $2 \cdot 1 = 2$. Término independiente: $(-5) \cdot 3 = -15$. Los grados se suman al multiplicar y el término independiente es el producto de los términos independientes.
d. $Q(3) = 9 - 12 + 3 = 0$: sí es raíz. $P(3) = 54 - 27 + 3 - 5 = 25 \neq 0$: no. Un número es raíz si el valor numérico es cero.

Solución del ejercicio 2

a. $(3x - 2)^2 = 9x^2 - 12x + 4$ y $(x + 5)(x - 5) = x^2 - 25$. Aplicamos $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ con $a = 3x$ y $b = 2$, y la suma por diferencia.
b. $(2x + 3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$. El doble producto es $2 \cdot 2x \cdot 3y = 12xy$.
c. $(x - 1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$. Aplicamos $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$. Comprobación con $x = 2$: $1 = 8 - 12 + 6 - 1$.
d. $(x^2 + 4x + 4) - (x^2 - 4x + 4) = 8x$. Los términos x^2 y 4 se anulan al restar. Respuesta: $8x$.

Solución del ejercicio 3

a. $3x^2(2x - 3)$ y $5xy(2x - 3y)$. Sacamos el máximo común divisor de los coeficientes y la menor potencia de cada letra.
b. $(x - 7)(x + 7)$ y $(3x - 2)(3x + 2)$. Son diferencias de cuadrados: $49 = 7^2$ y $9x^2 = (3x)^2$.
c. $(2x + 3)^2$ y $(x - 5)^2$. Son cuadrados perfectos: el término central es el doble producto.
d. $x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$. Aplicamos dos veces la diferencia de cuadrados; $x^2 + 4$ no se puede factorizar en los reales.

Solución del ejercicio 4

a. Coeficientes $1,\ 2,\ -5,\ 1$ y raíz 2: $1;\ 2+2=4;\ -5+8=3;\ 1+6=7$. Cociente x^2+4x+3 y resto 7.
b. $2x^3-x^2+3x-4=(x^2+1)(2x-1)+(x-3)$. Cociente $2x-1$ y resto $x-3$.
c. Con Ruffini y raíz -1: coeficientes $1,0,0,0,-1$ dan $1;\ -1;\ 1;\ -1;\ 0$. Cociente x^3-x^2+x-1 y resto 0.
d. $(x-2)(x^2+4x+3)+7=x^3+4x^2+3x-2x^2-8x-6+7=x^3+2x^2-5x+1$. Correcto.

Solución del ejercicio 5

a. $P(1)=1-4+1+6=4$ y $P(-2)=-8-16-2+6=-20$. Por el teorema del resto, el resto es el valor numérico en a.
b. $P(3)=27-36+3+6=0$ y $P(-1)=-1-4-1+6=0$. El valor numérico es cero, así que son raíces.
c. Con raíz 3: $1;\ -4+3=-1;\ 1-3=-2;\ 6-6=0$. Cociente x^2-x-2, resto 0.
d. $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$, luego $P(x)=(x-3)(x-2)(x+1)$. Comprobación con $x=0$: $P(0)=6$ y $(-3)(-2)\cdot 1=6$.

Solución del ejercicio 6

a. Divisores de -6: 1 es raíz ($1-6+11-6=0$). Ruffini da $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$. Resultado $(x-1)(x-2)(x-3)$. Comprobación con $x=0$: $(-1)(-2)(-3)=-6$.
b. Agrupando: $x^2(x+2)-(x+2)=(x+2)(x^2-1)=(x+2)(x-1)(x+1)$. Sacamos factor común por grupos.
c. $x=2$ es raíz: $16-12-6+2=0$. Ruffini da $2x^2+x-1=(2x-1)(x+1)$. Resultado $(x-2)(2x-1)(x+1)$. Comprobación con $x=0$: $(-2)(-1)\cdot 1=2$.
d. Es bicuadrado: $x^4-5x^2+4=(x^2-1)(x^2-4)=(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$. Comprobación con $x=0$: $4=(-1)\cdot 1\cdot(-2)\cdot 2$.

Solución del ejercicio 7

a. $\dfrac{(x-3)(x+3)}{(x+3)^2}=\dfrac{x-3}{x+3}$; no definida en $x=-3$. Factorizamos numerador y denominador y simplificamos el factor común.
b. $\dfrac{2(x-2)(x+2)}{(x-2)^2}=\dfrac{2(x+2)}{x-2}$; no definida en $x=2$.
c. $\dfrac{x(x-1)(x+1)}{(x-1)^2}=\dfrac{x(x+1)}{x-1}$; no definida en $x=1$.

d. $\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+2)} = \dfrac{x-2}{x+2}$; no definida en $x=3$ ni en $x=-2$. Los valores prohibidos se miran en el denominador original.

Solución del ejercicio 8

a. mcm $=(x-1)(x+1)$: $\dfrac{(x+1)+2(x-1)}{x^2-1} = \dfrac{3x-1}{x^2-1}$. Multiplicamos cada numerador por el factor que falta en su denominador. Comprobación con $x=2$: $1+\dfrac{2}{3}=\dfrac{5}{3}$.

b. mcm $=x^2-4$: $\dfrac{(x+1)(x+2)-(x-3)(x-2)}{x^2-4} = \dfrac{8x-4}{x^2-4}$. Desarrollamos: $x^2+3x+2-(x^2-5x+6)=8x-4$.

c. $\dfrac{(x-2)(x+2)x^2}{x(x+2)} = x(x-2)$. Factorizamos x^2-4 y simplificamos x y $x+2$.

d. $\dfrac{x}{x+2}\cdot\dfrac{(x-2)(x+2)}{x^2} = \dfrac{x-2}{x}$. Dividir es multiplicar por la inversa; después simplificamos.

Solución del ejercicio 9

a. $A(x)=(x+4)(x+1)=x^2+5x+4$ y $P(x)=2(2x+5)=4x+10$. Multiplicamos los lados para el área y sumamos los cuatro lados para el perímetro.

b. $x=6$: lados 10 y 7; $A=70$ m^2 y $P=34$ m. Sustituimos $x=6$ en las dos fórmulas.

c. $x^2+5x+4=130$, $x^2+5x-126=0$, $(x+14)(x-9)=0$. Solo vale $x=9$ (la otra solución es negativa). Comprobación: $13\cdot 10=130$.

d. Lados 13 y 10: $P=4\cdot 9+10=46$ m. Respuesta: 46 m de valla.

Solución del ejercicio 10

a. Dimensiones $(40-2x)$, $(30-2x)$ y x.
$V(x)=x(40-2x)(30-2x)=4x^3-140x^2+1200x$. Al doblar, el recorte x se convierte en la altura de la caja.

b. $V(3)=3\cdot 34\cdot 24=2448$; $V(4)=4\cdot 32\cdot 22=2816$; $V(5)=5\cdot 30\cdot 20=3000$; $V(6)=6\cdot 28\cdot 18=3024$; $V(7)=7\cdot 26\cdot 16=2912$ cm^3. Sustituimos cada valor en el producto de las tres dimensiones.

c. El máximo de la tabla está en $x=6$, con 3024 cm^3. Comparamos los valores de la tabla.

d. Dimensiones $30\times 20\times 5$ cm: 3000 cm$^3=3$ L. Un litro son 1 000 cm^3. Respuesta: 3 litros.

Solución del ejercicio 11

a. $(60+2x)(40+2x) = 4x^2 + 200x + 2400$. Multiplicamos los dos binomios término a término.
b. Se resta el área del cuadro (2400): $A_m = 4x^2 + 200x$. El área del marco es el área total menos el área del cuadro, $60 \cdot 40 = 2\,400$.
c. $A_m(3) = 36 + 600 = 636$ cm^2. Sustituimos $x = 3$. Respuesta: 636 cm^2.
d. $4x^2 + 200x = 864$, $x^2 + 50x - 216 = 0$, $(x+54)(x-4) = 0$. Vale $x = 4$ cm. Dividimos entre 4 y factorizamos; la solución negativa no sirve para una anchura. Comprobación: $4 \cdot 16 + 200 \cdot 4 = 864$.

Solución del ejercicio 12

a. $-(x-10)(x-30) = -(x^2 - 40x + 300) = -x^2 + 40x - 300$. Correcto.
b. $B(x) = 0$ en $x = 10$ y $x = 30$ docenas. Son las raíces de $B(x)$.
c. $B(20) = -400 + 800 - 300 = 100$: 10 000 €. $B(19) = 99$ y $B(21) = 99$, luego 20 docenas es el máximo. El máximo de la parábola está en el punto medio de las raíces.
d. Es positivo entre las raíces: 10. Como a, la parábola es positiva entre sus raíces.

Solución del ejercicio 13

a. $h(t) = -5t(t-3)$. Sacamos factor común $-5t$.
b. $h = 0$ en $t = 0$ (lanzamiento) y $t = 3$ s (cae). Igualamos cada factor a cero. Respuesta: cae a los 3 segundos.
c. $h(1) = 10$ m; $h(1{,}5) = -11{,}25 + 22{,}5 = 11{,}25$ m; $h(2) = -20 + 30 = 10$ m. Sustituimos cada valor de t; los valores en 1 y 2 son iguales por la simetría.
d. Raíces 0 y 3; punto medio $t = 1{,}5$ s. Altura máxima $11{,}25$ m. Respuesta: la altura máxima es 11,25 m, a los 1,5 s.

Solución del ejercicio 14

a. Lado exterior $x + 4$. Camino: $(x+4)^2 - x^2 = 8x + 16$. El camino añade 2 m por cada lado, así que el lado exterior aumenta 4 m.
b. $x = 10$: 96 m^2 y coste $96 \cdot 12 = 1152$ €. Sustituimos $x = 10$ y multiplicamos por el precio.
c. $8x + 16 = 144$, $8x = 128$, $x = 16$ m. Restamos 16 y dividimos entre 8. Respuesta: 16 m.
d. Exterior $20^2 = 400$ y jardín $16^2 = 256$; $400 - 256 = 144$. Correcto. Las dos áreas confirman el resultado.

Solución del ejercicio 15

a. $(10+2x)(5+2x) = 4x^2+30x+50$. Se resta la piscina (50): $A(x) = 4x^2+30x$. Desarrollamos el producto y restamos el área de la piscina, $10 \cdot 5 = 50$.
b. $A(0{,}5) = 1+15 = 16$; $A(1) = 34$; $A(1{,}5) = 9+45 = 54$; $A(2) = 16+60 = 76$ m^2. Sustituimos cada valor de x en $A(x)$.
c. $A(x) = 2x(2x+15)$. El factor común es $2x$.
d. $4x^2+30x = 60$, $2x^2+15x-30 = 0$; $x = \dfrac{-15+\sqrt{465}}{4} \approx 1{,}64$ m. Dividimos entre 2 y aplicamos la fórmula; solo vale la solución positiva.
e. $A(1) = 34$ m^2; coste $34 \cdot 25 = 850$ €. Multiplicamos el área por el precio. Respuesta: 850 €.

Solución del ejercicio 16

a. $V(-1) = -1+6-11+6 = 0$. Ruffini: $1;\ 5;\ 6;\ 0$, luego $V = (x+1)(x^2+5x+6) = (x+1)(x+2)(x+3)$.
b. $B(x) = (x+1)(x+2)$, luego la altura es $\dfrac{V}{B} = x+3$.
c. $x = 2$: dimensiones $3 \times 4 \times 5$ y $V = 60$ cm^3; con la fórmula $8+24+22+6 = 60$.
d. $(x+1)(x+2)(x+3) = 210 = 5 \cdot 6 \cdot 7$, luego $x = 4$.
e. $504 = 7 \cdot 8 \cdot 9$, luego $x = 6$. Con 100: no hay tres naturales consecutivos con producto 100 ($4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$ y $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$), así que no es posible.

Solución del ejercicio 17

a. mcm $= x(x+5)$: $T(x) = \dfrac{60(x+5)+60x}{x(x+5)} = \dfrac{60(2x+5)}{x(x+5)}$. Sumamos las dos fracciones con denominador común $x(x+5)$.
b. $T(15) = \dfrac{60 \cdot 35}{15 \cdot 20} = 7$ h y $T(20) = \dfrac{60 \cdot 45}{20 \cdot 25} = 5{,}4$ h. Sustituimos cada velocidad.
c. $60(2x+5) = 7x(x+5)$, $7x^2-85x-300 = 0$. Con $x = 15$: $1575-1275-300 = 0$. Es solución (la otra es negativa). Multiplicamos los dos miembros por $x(x+5)$ y pasamos todo a un miembro.
d. Velocidad media $= \dfrac{120}{7} \approx 17{,}14$ km/h (no es la media de 15 y 20). La velocidad media es la distancia total, 120 km, entre el tiempo total.

Solución del ejercicio 18

a. $z^2-13z+36 = 0$ da $z = 4$ o $z = 9$. Soluciones $x = \pm 2$ y $x = \pm 3$.
b. $z^2-5z-36 = 0$ da $z = 9$ o $z = -4$. Solo $z = 9$ sirve: $x = \pm 3$.

c. $z^2+z+1=0$ tiene discriminante $1-4=-3$: no hay solución real.
d. Lados a y $b=\dfrac{12}{a}$ con $a^2+\dfrac{144}{a^2}=25$, o sea $a^4-25a^2+144=0$. Con $z=a^2$: $z=9$ o $z=16$, luego $a=3$ y $b=4$.

Solución del ejercicio 19

a. El grifo A llena $\dfrac{1}{x}$ y el grifo B $\dfrac{1}{x+3}$; juntos llenan $\dfrac{1}{2}$ en una hora.
b. mcm $=2x(x+3)$: $2(x+3)+2x=x(x+3)$.
c. $4x+6=x^2+3x$, luego $x^2-x-6=0$, $(x-3)(x+2)=0$. Se descarta $x=-2$ (el tiempo no es negativo).
d. A tarda 3 h y B tarda 6 h. Comprobación: $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{2}$.

Solución del ejercicio 20

a. $x^4+4x^2+4-4x^2=(x^2+2)^2-(2x)^2=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$. Así aparece una diferencia de cuadrados.
b. $P(2)=8+4k-8+4=4k+4=0$, luego $k=-1$. Por el teorema del resto, $P(2)$ debe ser 0.
c. $\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{x^2+2x+4}{x+2}$. x^3-8 es una diferencia de cubos.
d. $n^3-n=(n-1)n(n+1)$ son tres enteros consecutivos: uno es múltiplo de 3 y al menos uno es par, luego el producto es múltiplo de 6.