Apuntes - Números reales e intervalos

Curso: 4 Eso

En este tema aprenderás: los conjuntos de números, la recta real y el valor absoluto, intervalos, unión e intersección de intervalos, entornos y valor absoluto con desigualdades y más ejemplos resueltos. Cada idea va en un cuadro de color, con ejemplos resueltos paso a paso.

Actividad de introducción: el termómetro del patio

En una mañana de enero, un termómetro de un colegio de Burgos marca entre $-3\,^{\circ}$C y $4\,^{\circ}$C. Piensa en estas preguntas antes de seguir leyendo: ¿es $2{,}7$ una temperatura posible? ¿Y -3? ¿Y $4{,}01$? ¿Cuántas temperaturas distintas caben en ese tramo? Para contestar no basta con los números enteros: hay infinitos números decimales entre cada pareja de números, y algunos de ellos ni siquiera se pueden escribir como fracción. Para hablar con precisión de «todas las temperaturas entre dos valores» las matemáticas usan los **intervalos**, y para medir lo lejos que está una medida de su valor ideal usan el **valor absoluto**. Este tema reúne las dos ideas y las aplica a situaciones reales como las tolerancias de una fábrica, los precios por tramos o las notas necesarias para aprobar.

Los conjuntos de números

Observación

En 4.º ESO se organizan todos los números que conoces en conjuntos cada vez más grandes. Los **números naturales** $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ sirven para contar. Los **enteros** $\mathbb{Z}$ añaden los negativos. Los **racionales** $\mathbb{Q}$ son los que se pueden escribir como fracción $\frac{a}{b}$ con $a, b \in \mathbb{Z}$ y $b \neq 0$; su expresión decimal es exacta ($0{,}75$) o periódica ($0{,}\overline{3}$). Los **irracionales** tienen infinitas cifras decimales que no se repiten: $\sqrt{2}$, π, $\sqrt{3}$, el número φ. Racionales e irracionales juntos forman los **números reales** $\mathbb{R}$. Se cumple $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Observación

Atención: la raíz de un número no siempre es irracional. $\sqrt{9} = 3$ es natural, mientras que $\sqrt{10}$ es irracional. Una raíz cuadrada de un entero positivo es irracional salvo que el número sea cuadrado perfecto.

Fracción generatriz

Regla

Todo decimal exacto o periódico tiene fracción generatriz. Para se multiplica por 100: ; restando, $99x = 36$ y $x = \frac{36}{99} = \frac{4}{11}$. Para $x = 2{,}\overline{3}$: $10x = 23{,}\overline{3}$, luego $9x = 21$ y $x = \frac{7}{3}$.

La recta real y el valor absoluto

Propiedad

Cada número real se corresponde con un único punto de la **recta real**, y cada punto con un único número. Por eso los números reales se pueden ordenar: a si a queda a la izquierda de b. El **valor absoluto** de x es su distancia al origen: $|x| = x$ si $x \geq 0$ y $|x| = -x$ si x. La distancia entre dos números es $d(a, b) = |a - b|$. Por ejemplo, $d(-3, 5) = |-3 - 5| = 8$.

Intervalos

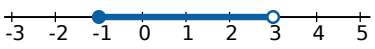
Definición: intervalo

Un **intervalo** es un conjunto de números reales comprendidos entre dos extremos. El corchete incluye el extremo y el paréntesis no lo incluye. Los símbolos $+\infty$ y $-\infty$ no son números y siempre llevan paréntesis.

Tipo	Notación	Desigualdad
Abierto	(a, b)	a
Cerrado	$[a, b]$	$a \leq x \leq b$
Semiabierto	$[a, b)$ o $(a, b]$	$a \leq x$ o a
Semirrecta	$[a, +\infty)$, $(-\infty, b)$	$x \geq a$, x

Ejemplo 1

El intervalo $[-1, 3)$ se dibuja con punto relleno en -1 y punto vacío en 3.



Unión e intersección de intervalos

Propiedad

La **intersección** $A \cap B$ contiene los números que están en ambos intervalos; la **unión** $A \cup B$ contiene los que están en alguno de los dos. Para resolverlo, dibuja los dos intervalos en la misma recta y observa.

Ejemplo 2

$[1,6) \cap (3,9]$.

Los números que cumplen $1 \leq x$ y a la vez 3 son los que cumplen 3. Resultado: $(3,6)$.

Ejemplo 3

$[1,4] \cup (3,8)$.

Se solapan en $(3,4]$, así que la unión es un solo intervalo: $[1,8)$.

Ejemplo 4

$(-\infty,-1) \cup [2,5]$ no se puede escribir como un único intervalo porque hay un hueco entre -1 y 2. Se deja como unión.

Entornos y valor absoluto con desigualdades

Definición: entorno

El **entorno** de centro a y radio $r > 0$ es el intervalo abierto $E(a,r) = (a-r, a+r)$, es decir, los x que cumplen $|x-a|$. Por ejemplo, $E(3,2) = (1,5)$. Del mismo modo:

- $|x|$ equivale a $-k$, es decir, $(-k,k)$.
- $|x| > k$ equivale a x o $x > k$, es decir, $(-\infty,-k) \cup (k,+\infty)$.
- $|x-a| \leq r$ equivale a $[a-r, a+r]$.

Ejemplo 5

Resolver $|x-1| \leq 3$: $-3 \leq x-1 \leq 3$, se suma 1 y queda $-2 \leq x \leq 4$, o sea $[-2,4]$.

Cómo se hace: resolver una desigualdad con valor absoluto

1. $|x-a|$ equivale a $a-r$, es decir, $(a-r, a+r)$.
2. $|x-a| > r$ equivale a x o $x > a+r$.
3. Escribe la solución como intervalo o unión de intervalos y represéntala en la recta.
4. Ejemplo: $|x-3| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x-3 \leq 2 \Rightarrow x \in [1,5]$.

Más ejemplos resueltos

Ejemplo 6: Clasificar números

Queremos decidir en qué conjuntos está $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$.

Aplicamos la propiedad del cociente de raíces: $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{50}{2}} = \sqrt{25} = 5$. Aunque el enunciado parecía contener irracionales, el resultado es un número natural, y por tanto pertenece a $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$. Moraleja: simplifica siempre antes de clasificar.

Ejemplo 7: De la situación al intervalo

Un ascensor de un edificio de Sevilla admite como máximo 400 kg y, para que se ponga en marcha, la carga debe ser positiva.

Si m es la carga en kilogramos, se cumple 0, es decir, $m \in (0, 400]$. El 0 queda fuera porque sin carga el ascensor no cuenta como ocupado; el 400 sí está incluido porque es la carga máxima permitida.

Ejemplo 8: Valor absoluto y error

Un tornillo debe medir 30 mm con un error máximo de 0,3 mm.

Se escribe $|x - 30| \leq 0{,}3$, que equivale a $29{,}7 \leq x \leq 30{,}3$, o sea $x \in [29{,}7;\ 30{,}3]$. Un tornillo de 30,4 mm queda fuera del intervalo y se rechaza.

Ejemplo 9: Intersección con tres condiciones

Halla los números reales que cumplen a la vez $x \geq -1$, x y $x \neq 2$.

Primero $[-1, 4)$; después se quita el punto 2. El resultado es $[-1, 2) \cup (2, 4)$. Cuando se excluye un solo punto, el intervalo se parte en dos.

¡Atención! Errores frecuentes

- Escribir $[2, +\infty]$: el infinito nunca lleva corchete.
- Pensar que $0{,}\overline{9}$ es distinto de 1: en realidad son el mismo número.
- Decir que toda raíz es irracional ($\sqrt{16} = 4$).
- Confundir (a, b), que es un intervalo, con el punto de coordenadas (a, b).

Intervalos en situaciones reales

Método: de un enunciado a un intervalo

1. Identifica la magnitud (x = peso, edad, temperatura, minutos…) y sus unidades.
2. Traduce cada condición del texto: «al menos» es $\geq$, «como máximo» es $\leq$, «más de» es $>$ y «menos de» es .
3. Si las condiciones deben cumplirse a la vez, haz la intersección; si basta con una de ellas, la unión.
4. Escribe el resultado con corchete o paréntesis según el extremo se incluya o no.
5. Comprueba con un valor interior y con un valor exterior.

Ejemplo 6

Un ascensor admite entre 2 y 8 personas y como máximo 630 kg. Si cada persona pesa como mucho 90 kg, ¿puede subir el grupo máximo?

Dos condiciones simultáneas: número de personas $n \in [2, 8]$ y peso total $P \leq 630$. Con 8 personas de 90 kg el peso máximo es $8 \cdot 90 = 720$ kg, que supera 630. Por tanto no siempre puede subir: para estar seguro con personas de hasta 90 kg, $n \leq \dfrac{630}{90} = 7$.

¡Atención! Extremos y signos

Al multiplicar o dividir una desigualdad por un número negativo, el sentido se invierte: de $-2x \leq 6$ se obtiene $x \geq -3$. Y no confundas $[a, b]$ (incluye los extremos) con (a, b) (no los incluye): para un tornillo de $12 \pm 0{,}05$ mm, $11{,}95$ mm sí es válido.

Valor absoluto: distancias, errores y tolerancias

Propiedades del valor absoluto

- $|x| \geq 0$ para todo x, y $|x| = 0$ solo si $x = 0$.
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ y [redacted].
- Desigualdad triangular: $|a + b| \leq |a| + |b|$.
- $|x - a|$ equivale a $a - r$; es el entorno $E(a, r)$.
- $|x - a| > r$ equivale a x o $x > a + r$.

Ejemplo 7

La temperatura ideal de una cámara de fruta es $4\ ^\circ$C con una tolerancia de $\pm 1{,}5\ ^\circ$C. ¿Es válida una medida de $5{,}7\ ^\circ$C?

La condición es $|T - 4| \leq 1{,}5$, es decir $T \in [2{,}5;\ 5{,}5]$. Como $|5{,}7 - 4| = 1{,}7 > 1{,}5$, la medida no es válida: la cámara está $0{,}2\ ^\circ$C por encima del límite.

Definición: error absoluto y error relativo

Si el valor exacto es V y la aproximación es a, el **error absoluto** es $E_a = |V - a|$ y el **error relativo** es $E_r = \dfrac{E_a}{|V|}$, que suele darse en porcentaje. El error relativo permite comparar medidas de distinto tamaño: equivocarse 1 cm en una mesa de 120 cm es menos grave que en un lápiz de 15 cm.

Ejemplo 8

Se mide un campo de fútbol de 105 m y se obtiene $104{,}4$ m. Calcula los dos

errores.

$E_a = |105 - 104{,}4| = 0{,}6$ m. $E_r = \dfrac{0{,}6}{105} \approx 0{,}0057 = 0{,}57\,\%$. Es un error pequeño porque el campo es largo.

¿Sabías que?

Los griegos de la escuela de Pitágoras creyeron durante un tiempo que todos los números eran fracciones. Cuenta la tradición que descubrir que la diagonal de un cuadrado de lado 1, es decir $\sqrt{2}$, no se podía escribir como fracción causó una verdadera crisis. Hoy sabemos que los irracionales son «más numerosos» que los racionales y que los números que usamos en la vida diaria, con unas pocas cifras decimales, son siempre aproximaciones racionales.

Resumen del tema

Antes de pasar a los ejercicios conviene repasar la secuencia de trabajo: primero decide a qué conjunto pertenece cada número; después dibuja los intervalos sobre la recta real para ver con claridad uniones e intersecciones; por último, cuando haya valores absolutos, interprétalos como distancias. Si la solución final no es coherente con el dibujo de la recta, revisa los signos de las desigualdades y los extremos. Comprueba siempre con un número que debería estar dentro del intervalo y con otro que debería quedar fuera.

El consejo de Otto

Antes de dar la solución, dibuja siempre la recta y sombrea. Si dudas de un extremo, pregúntate: ¿la desigualdad es estricta () o no ($\leq$)? Estricta, paréntesis; no estricta, corchete.