Soluciones - Números reales e intervalos

Curso: 4 Eso

Solución del ejercicio 1

a. -7 es entero negativo ($\mathbb{Z}$). $\dfrac{12}{4} = 3$ es natural.

b. $\sqrt{49} = 7$ es natural. $\sqrt{50}$ no es cuadrado perfecto, luego es irracional.

c. El primero es periódico, luego racional: . El segundo tiene infinitas cifras sin periodo: irracional.

d. $\pi - 3$ es irracional (si fuese racional, π también lo sería). $\dfrac{\pi}{\pi} = 1$ es natural: operar con irracionales puede dar un racional.

Solución del ejercicio 2

a. $x = 0{,}\overline{7}$; $10x = 7{,}\overline{7}$; restando $9x = 7$, $x = \dfrac{7}{9}$. Multiplicamos por 10 porque el periodo tiene una cifra; al restar desaparece la parte periódica. Comprobación: $7 : 9 = 0{,}777\ldots$.

b. y ; restando $99x = 234$, $x = \dfrac{234}{99} = \dfrac{26}{11}$. El periodo tiene dos cifras, por eso multiplicamos por 100; simplificamos entre 9. Comprobación: $26 : 11 = 2{,}3636\ldots$.

c. $100x = 125{,}\overline{5}$ y $10x = 12{,}\overline{5}$; restando $90x = 113$, $x = \dfrac{113}{90}$. Es periódico mixto: multiplicamos por 100 y por 10 para igualar las partes periódicas. Comprobación: $113 : 90 = 1{,}2555\ldots$.

d. y ; restando $999x = 45$, $x = \dfrac{45}{999} = \dfrac{5}{111}$. El periodo tiene tres cifras, por eso multiplicamos por 1 000; simplificamos entre 9. Comprobación: $5 : 111 = 0{,}045045\ldots$.

Solución del ejercicio 3

a. $(-2, 5]$, es decir -2. Es acotado. El paréntesis indica que -2 no está incluido y el corchete que 5 sí.

b. $(-\infty, 3)$, es decir x. No es acotado (no tiene mínimo ni cota inferior). Se extiende sin límite hacia la izquierda.

c. $|x - 1| \leq 4$ equivale a $-4 \leq x - 1 \leq 4$, o sea $-3 \leq x \leq 5$: $[-3, 5]$. Acotado. La distancia de x a 1 se escribe $|x - 1|$.

d. $(-\infty, -1] \cup (6, +\infty)$. No es acotado. Es la unión de dos semirrectas.

Solución del ejercicio 4

a. $8 + 3 - 2 = 9$. Primero calculamos cada valor absoluto: 8, 3 y 2. Respuesta: 9.
b. Como $\sqrt{5} \approx 2{,}24 > 2$, $2 - \sqrt{5}$ y su valor absoluto es $\sqrt{5} - 2$. Como $\sqrt{5}$, $\sqrt{5} - 3$ y su valor absoluto es $3 - \sqrt{5}$. El valor absoluto de un número negativo es su opuesto.
c. $d = |-3{,}5 - 2{,}25| = |-5{,}75| = 5{,}75$. La distancia entre dos números es el valor absoluto de su diferencia. Respuesta: 5,75.
d. $x = 6$ o $x = -6$. Para la segunda: $x - 2 = 5$ o $x - 2 = -5$, luego $x = 7$ o $x = -3$. Un valor absoluto igual a 5 tiene dos posibilidades, 5 y -5. Comprobación: $|7 - 2| = 5$ y $|-3 - 2| = 5$.

Solución del ejercicio 5

a. $A \cap B = (0, 2)$ y $A \cup B = [-3, 6]$. La intersección es la parte común y la unión todo lo que está en alguno.
b. $A \cap C = [-3, -1]$. $B \cap C = \varnothing$ porque B empieza en 0.
c. $A \cup C = (-\infty, 2)$ (los dos se solapan en $[-3, -1]$).
d. $A \cup B = [-3, 6]$ y su intersección con C es $[-3, -1]$. Respuesta: $[-3, -1]$.

Solución del ejercicio 6

a. $E(4, 3) = (1, 7)$ y $E(-2; 0{,}5) = (-2{,}5;\ -1{,}5)$. Restamos y sumamos el radio al centro.
b. Centro $\dfrac{1 + 9}{2} = 5$, radio $\dfrac{9 - 1}{2} = 4$: $E(5, 4)$. El centro es el punto medio y el radio la mitad de la longitud.
c. $E(4, 2) = (2, 6)$: $5{,}9$ sí pertenece; 6 no (el extremo no se incluye). Un entorno es un intervalo abierto.
d. $|x - 3|$. La distancia de x al centro 3 es menor que el radio 2.

Solución del ejercicio 7

a. Lunes $[-6, 2]$, amplitud 8; martes $[-8, 1]$, amplitud 9; miércoles $[-4, 5]$, amplitud 9; jueves $[-7, 3]$, amplitud 10; viernes $[-5, 0]$, amplitud 5.
b. La unión es $[-8, 5]$: de la mínima más baja (-8) a la máxima más alta (5).
c. La intersección es el intervalo que va de la mayor de las mínimas a la menor de las máximas: $[-4, 0]$.
d. El jueves, con $3 - (-7) = 10$ grados.

Solución del ejercicio 8

a. $[0, 4)$ gratis; $[4, 12)$ 18 €; $[12, 65)$ 32 €; $[65, +\infty)$ 20 €.
b. $2 \cdot 32 + 20 + 18 + 0 = 102$ €.
c. $11{,}5 \in [4, 12)$: paga 18 €. Con 12 años exactos está en $[12, 65)$: paga 32 €.
d. Pagan menos de 30 € los tramos $[0, 4)$, $[4, 12)$ y $[65, +\infty)$.

Solución del ejercicio 9

a. $[11{,}95;\ 12{,}05]$, es decir $|x - 12| \leq 0{,}05$.
b. Son válidas $11{,}97$; $12{,}05$; $11{,}95$ y $12{,}00$ (los extremos están incluidos). No es válida $12{,}06$.
c. Error absoluto $|12{,}06 - 12| = 0{,}06$ mm; relativo $\dfrac{0{,}06}{12} = 0{,}005 = 0{,}5\ \%$.
d. El intervalo sería $[11{,}9;\ 12{,}1]$ y $12{,}06$ pasaría a ser válida.

Solución del ejercicio 10

a. $[60, 120]$.
b. Cumplen 60, 95 y 120. No cumplen 58 ni 121.
c. $t = \dfrac{150}{v}$ es decreciente: con $v = 120$, $t = 1{,}25$ h; con $v = 60$, $t = 2{,}5$ h. Luego $t \in [1{,}25;\ 2{,}5]$ h.
d. $1{,}25 \cdot 60 = 75$ min y $2{,}5 \cdot 60 = 150$ min: $[75, 150]$ min.

Solución del ejercicio 11

a. $L = \pi d$: $3{,}14 \cdot 20 = 62{,}80$ m y $\dfrac{22}{7} \cdot 20 = 62{,}86$ m. Multiplicamos la aproximación de π por el diámetro.
b. $|3{,}14159 - 3{,}14| = 0{,}00159$; [redacted]. Gana $\dfrac{22}{7}$. Calculamos la diferencia en valor absoluto con el valor de referencia.
c. $\dfrac{0{,}00159}{3{,}14159} \approx 0{,}0506\ \% \approx 0{,}05\ \%$. Dividimos el error absoluto entre el valor exacto.
d. Centésimas: $3{,}14$ (por defecto). Milésimas: $3{,}142$ (por exceso). Una aproximación es por defecto si es menor que el valor exacto.

Solución del ejercicio 12

a. $C(x) = 480 + 12x$. Hay un gasto fijo, el autobús, y otro que depende de los alumnos.

b. $900 \leq 480 + 12x \leq 1080$. El coste debe estar entre los dos valores, incluidos.
c. Restamos 480: $420 \leq 12x \leq 600$. Dividimos entre 12: $35 \leq x \leq 50$. Intervalo $[35, 50]$. Comprobación: $C(35) = 900$ y $C(50) = 1\,080$.
d. Pueden ir desde 35 hasta 50 alumnos: $50 - 35 + 1 = 16$ valores enteros. Respuesta: entre 35 y 50 alumnos.

Solución del ejercicio 13

a. -4: $(-4, 4)$. El valor absoluto menor que 4 significa estar a menos de 4 unidades del 0.
b. $x - 3 \geq 2$ o $x - 3 \leq -2$: $x \geq 5$ o $x \leq 1$, es decir $(-\infty, 1] \cup [5, +\infty)$. La distancia a 3 es al menos 2. Comprobación: $x = 0$ da $3 \geq 2$.
c. $-7 \leq 2x + 1 \leq 7$, $-8 \leq 2x \leq 6$, $-4 \leq x \leq 3$: $[-4, 3]$. Restamos 1 y dividimos entre 2 en los tres miembros.
d. El valor absoluto es positivo salvo si $x + 5 = 0$, o sea $x = -5$: solución $\mathbb{R} \setminus \{-5\} = (-\infty, -5) \cup (-5, +\infty)$.

Solución del ejercicio 14

a. $[24, 28]$, es decir $|T - 26| \leq 2$.
b. Correctas: $24{,}5$; $27{,}9$; 28 (extremo incluido) y 26. Solo es incorrecta $23{,}9$, porque es menor que 24.
c. $|27{,}1 - 26| = 1{,}1$ °C.
d. Bebés: $[29, 31]$. Adultos: $[24, 28]$. La intersección es vacía: no hay valor común.

Solución del ejercicio 15

a. Sin recargo: $[0, 23]$. Con recargo de 15 €: $(23, 32]$. No admitidas: $(32, +\infty)$.
b. $18{,}5$: sin recargo. 23: sin recargo (extremo incluido). $23{,}4$: 15 €. $31{,}9$: 15 €. 33: no se admite. Recargo total: $15 + 15 = 30$ € y hay que rehacer la de 33 kg.
c. Contenido c con $3{,}2 + c \leq 23$, luego $c \leq 19{,}8$. Intervalo $[0;\ 19{,}8]$ kg.
d. $2{,}1 + 0{,}8 + x \leq 10$, $x \leq 7{,}1$; además $x \geq 0$. Solución $[0;\ 7{,}1]$.
e. $\dfrac{7{,}1}{10} = 0{,}71 = 71\ \%$ del peso máximo.

Solución del ejercicio 16

a. Lados x y $2x$: $P(x) = 2x + 4x = 6x$.
b. $60 \leq 6x \leq 80$, luego $10 \leq x \leq \dfrac{40}{3} \approx 13{,}33$. Intervalo $\left[10, \dfrac{40}{3}\right]$.
c. Mínima: $A(10) = 2 \cdot 100 = 200$ m². Máxima: $A\left(\dfrac{40}{3}\right) = 2 \cdot \dfrac{1600}{9} = \dfrac{3200}{9} \approx 355{,}6$

m². El área está en $[200;\ 355{,}6]$.
d. Además $x \leq 12$: la intersección es $[10, 12]$. Con $x = 12$ el área es $2 \cdot 144 = 288$ m².

Solución del ejercicio 17

a. $A(m) = 9 + 0{,}05m$. $B(m) = 15$ si $m \leq 100$ y $B(m) = 15 + 0{,}04(m - 100) = 11 + 0{,}04m$ si $m > 100$.
b. A: 11,50; 14; 24; 39. B: 15; 15; 23; 35. C: 30 siempre.
c. Para $m \leq 100$: $9 + 0{,}05m$ si m, luego A es más barata en todo $[0, 100]$. Para $m > 100$: $9 + 0{,}05m$ equivale a $0{,}01m$, o sea m. Por tanto A es más barata para m y B para $m > 200$ (igualdad en 200).
d. B supera 30 € cuando $11 + 0{,}04m > 30$, es decir $m > 475$. A supera 30 € cuando $0{,}05m > 21$, $m > 420$. Conviene C a partir de $m > 475$ minutos (frente a B) y de 420 frente a A.
e. En $[200, 450]$ ahora B es más barata que A. Con $m = 450$: $B = 11 + 18 = 29$ € y $A = 31{,}50$ €. La C cuesta 30 €. Le conviene B, con un máximo de 29 €.

Solución del ejercicio 18

a. $N = 0{,}3 \cdot 5{,}5 + 0{,}3 \cdot 6{,}5 + 0{,}4x = 3{,}6 + 0{,}4x$. Aplicamos los pesos de cada examen.
b. $3{,}6 + 0{,}4x \geq 5$, $0{,}4x \geq 1{,}4$, $x \geq 3{,}5$. Comprobación: $3{,}6 + 1{,}4 = 5$.
c. $7 \leq 3{,}6 + 0{,}4x$, $3{,}4 \leq 0{,}4x$, $8{,}5 \leq x$. Como $x \leq 10$, el intervalo es $[8{,}5;\ 10]$.
d. $N \geq 9$ exige $0{,}4x \geq 5{,}4$, $x \geq 13{,}5$, imposible porque la nota máxima es 10. Con un 10 saca $7{,}6$.
e. $x = 4$: $N = 3{,}6 + 1{,}6 = 5{,}2$, aprueba. $x = 8{,}5$: $N = 3{,}6 + 3{,}4 = 7$, justo notable.

Solución del ejercicio 19

a. $[40, 55]$ minutos, es decir entre las 8:40 y las 8:55.
b. Suma de intervalos: $[40 + 8,\ 55 + 12] = [48, 67]$, entre las 8:48 y las 9:07.
c. No: el extremo superior 67 supera los 60 minutos (las 9:00). Solo está seguro si el intervalo total estuviera dentro de $[0, 60]$.
d. En el peor caso llega en el minuto 67; para llegar a las 9:00 debe salir 7 minutos antes, a las 7:53 como muy tarde.

Solución del ejercicio 20

a. Si $\sqrt{2} + 1 = \dfrac{a}{b}$ fuese racional, entonces $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b} - 1 = \dfrac{a - b}{b}$ sería racional, lo cual es falso. Luego es irracional.
b. $\dfrac{3}{7} \approx 0{,}4286$. Un irracional en $(0{,}4286;\ 0{,}5)$ es, por ejemplo, $0{,}4545545554\ldots$ (cada

vez un cinco más).

c. $\sqrt{3} \approx 1{,}732$; $\dfrac{7}{4} = 1{,}75$; $1{,}7\overline{3} = 1{,}7333\ldots$; $\dfrac{5}{3} = 1{,}666\ldots$. Orden: $\dfrac{5}{3}$.

d. Primer conjunto: $(1{,}5;\ 6{,}5)$ con enteros $2, 3, 4, 5, 6$. Segundo: $[-2, 0]$ con enteros $-2, -1, 0$. No se solapan: $5 + 3 = 8$ enteros.