Apuntes - Inecuaciones y sistemas de inecuaciones

Curso: 4 Eso

En este tema aprenderás: desigualdades y sus propiedades, inecuaciones de primer grado, sistemas de inecuaciones con una incógnita, inecuaciones de segundo grado y inecuaciones lineales con dos incógnitas. Cada idea va en un cuadro de color, con ejemplos resueltos paso a paso.

Actividad de introducción: el presupuesto de la fiesta

El delegado de clase de un instituto de Albacete tiene 60 € para la fiesta de fin de curso. Cada pizza cuesta 8 € y cada bebida $1{,}50$ €. ¿Cuántas pizzas puede comprar si ya ha reservado 12 € para bebidas? ¿Y si no sabe todavía cuántas bebidas comprará? Aquí no se pide un único valor, sino **todos los valores posibles**: no se trata de una igualdad, sino de una **desigualdad**. Las inecuaciones aparecen siempre que hay un límite: un presupuesto, un peso máximo, una nota mínima, un aforo. En este tema aprenderás a resolverlas con una incógnita y con dos, a escribir las soluciones con intervalos y a representar regiones del plano, una herramienta que usan las empresas para decidir cuánto producir.

Desigualdades y sus propiedades

Definición: inecuación

Una **inecuación** es una desigualdad (con $<$, $\leq$, $>$ o $\geq$) que contiene una incógnita y que se cumple para un conjunto de valores, normalmente un intervalo. Las reglas para transformarla son:

- Sumar o restar el mismo número a los dos miembros no cambia el sentido.
- Multiplicar o dividir por un número **positivo** no cambia el sentido.
- Multiplicar o dividir por un número **negativo** invierte el sentido: de $-2x$ se deduce $x > -3$.

Inecuaciones de primer grado

Propiedad

Se resuelven como una ecuación, vigilando el cambio de sentido. **Ejemplo 1.** $2 - 3x \geq 8$: se resta 2, $-3x \geq 6$; se divide entre -3 e invierte, $x \leq -2$. Solución: $(-\infty, -2]$.

Ejemplo 1: con denominadores

$\frac{x+1}{2} \leq \frac{2x-1}{3}$.

Se multiplica por 6: $3(x+1) \leq 2(2x-1) \Rightarrow 3x+3 \leq 4x-2 \Rightarrow 5 \leq x$. Solución: $[5, +\infty)$.

Propiedad

Doble desigualdad. -2 se resuelve restando 1 en todas las partes y dividiendo: -3, es decir, $(-1, 3]$.

Sistemas de inecuaciones con una incógnita

Definición: intersección

La solución es la **intersección** de las soluciones de cada inecuación. Se resuelve cada una por separado y se dibujan en la recta. **Ejemplo 3.** $\begin{cases} 2x-1 > 3 \\ x+4 \leq 9 \end{cases}$: la primera da $x > 2$ y la segunda $x \leq 5$. La solución común es $(2, 5]$. Si no hay números comunes, el sistema no tiene solución: $x > 4$ y x da $\varnothing$.

Cómo se hace: resolver un sistema de inecuaciones

1. Resuelve cada inecuación por separado.
2. Representa cada solución en la recta real.
3. La solución del sistema es la intersección: los valores que cumplen todas a la vez.
4. Escríbela como intervalo o di que no tiene solución si la intersección es vacía.

Ejemplo 2: intersección de dos soluciones

Resuelve $\begin{cases} 2x-1 > 3 \\ 5-x \geq 1 \end{cases}$.

Primera: $2x > 4 \Rightarrow x > 2$. Segunda: $-x \geq -4 \Rightarrow x \leq 4$. La intersección es $(2, 4]$.

Inecuaciones de segundo grado

Método: inecuaciones de segundo grado

Para resolver $ax^2+bx+c > 0$ (o con):

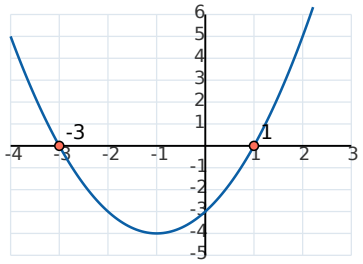
1. Se calculan las raíces de $ax^2+bx+c = 0$.
2. Las raíces dividen la recta en intervalos; en cada uno el signo de la expresión es constante.
3. Se prueba un número de cada intervalo (o se mira la parábola) y se eligen los

intervalos con el signo pedido.
4. Se incluyen las raíces solo si la desigualdad no es estricta.

Ejemplo 1

$x^2 + 2x - 3$.

Las raíces son $x = -3$ y $x = 1$. La parábola abre hacia arriba, así que queda por debajo del eje X entre las raíces. Solución: $(-3, 1)$.



Ejemplo 2

$x^2 - 4 > 0$

raíces ± 2; la parábola está por encima del eje fuera de las raíces. Solución: $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

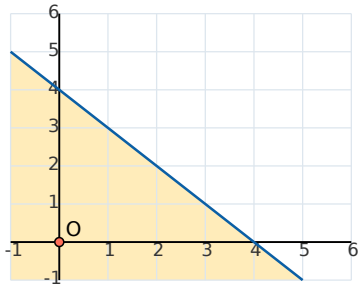
Propiedad

Casos especiales. Con discriminante nulo, como en $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$: ≥ 0 se cumple siempre, > 0 se cumple salvo en $x = 3$, y ≤ 0 solo en $x = 3$. Con discriminante negativo, como $x^2 + 1$, la expresión es siempre positiva: $x^2 + 1$ no tiene solución y $x^2 + 1 > 0$ se cumple para todo x.

Inecuaciones lineales con dos incógnitas

Definición: semiplano

La solución de $ax + by \leq c$ es un **semiplano**: la recta $ax + by = c$ lo limita. Se dibuja la recta (continua si la desigualdad incluye la igualdad y discontinua si es estricta) y se prueba un punto, por ejemplo el origen $(0, 0)$, para saber qué lado es. Para $x + y \leq 4$: en el origen $0 \leq 4$ es cierto, así que se sombrea el lado del origen.



Propiedad

Un **sistema** de inecuaciones con dos incógnitas tiene como solución la región donde se solapan los semiplanos. Por ejemplo, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 5$ da un triángulo de vértices $(0, 0)$, $(5, 0)$ y $(0, 5)$.

¡Atención! Errores frecuentes

- No invertir el sentido al multiplicar o dividir por un número negativo.
- Resolver $x^2 > 4$ como $x > 2$ y perder x.
- Poner corchete en un extremo de desigualdad estricta, o paréntesis en una no estricta.
- Unir en lugar de intersecar las soluciones de un sistema.

Inecuaciones racionales y signos

Método: estudiar el signo de un cociente

1. Pasa todos los términos a un miembro para comparar con cero.
2. Escribe la expresión como un único cociente y factoriza numerador y denominador.
3. Halla las raíces del numerador (incluidas si la desigualdad no es estricta) y las del denominador (siempre excluidas).
4. Ordena esos valores en la recta real y estudia el signo en cada intervalo con un valor de prueba.
5. Elige los intervalos que cumplen el signo pedido.

Ejemplo 3

Resuelve $\dfrac{x-2}{x+1}$.

El numerador se anula en 2 y el denominador en -1. Probamos: $x = -2$ da $\dfrac{-4}{-1} = 4 > 0$; $x = 0$ da $\dfrac{-2}{1} = -2$; $x = 3$ da $\dfrac{1}{4} > 0$. El cociente es negativo solo en $(-1, 2)$.

¡Atención! Errores con desigualdades

- Al multiplicar o dividir por un número negativo, el sentido de la desigualdad cambia.
- No se puede multiplicar por una expresión con x cuyo signo no se conoce: se pasa todo a un miembro.
- Un extremo con denominador cero nunca pertenece a la solución.
- En un sistema de inecuaciones la solución es la **intersección**, no la unión.
- Una desigualdad estricta se dibuja con línea discontinua y una no estricta con línea continua.

Inecuaciones de segundo grado: el método de la parábola

Método: resolver $ax^2+bx+c \geq 0$ o ≤ 0

1. Calcula las raíces de $ax^2+bx+c=0$ con la fórmula general.
2. Dibuja un esquema de la parábola: abierta hacia arriba si $a>0$ y hacia abajo si a.
3. Si hay dos raíces, la parábola está por debajo del eje entre ellas (si abre hacia arriba) y por encima fuera de ellas.
4. Si no hay raíces reales, el signo es el de a para todo x.
5. Incluye las raíces solo si la desigualdad no es estricta.

Ejemplo 4

Resuelve $2x^2-x-3 \leq 0$.

Las raíces son $x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+24}}{4}=\dfrac{1\pm 5}{4}$, es decir $x=\dfrac{3}{2}$ y $x=-1$. Como $a=2>0$, la parábola es negativa entre las raíces y se anula en ellas: la solución es $\left[-1,\dfrac{3}{2}\right]$.

Ejemplo 5

Un jugador de golf lanza una bola cuya altura, en metros, es $h=-0{,}1t^2+2t$ con t en segundos. ¿Cuándo está a más de 10 m?

Resolvemos $-0{,}1t^2+2t>10$, es decir $t^2-20t+100$, o sea $(t-10)^2$, que no se cumple nunca. La bola alcanza como máximo 10 m (en $t=10$ s), pero nunca supera esa altura.

Resumen de la estrategia

Ante una inecuación, primero identifica su tipo: de primer grado, de segundo grado o con fracciones. Después aplica el método correspondiente, escribe la solución con

intervalos y, por último, comprueba un valor de dentro y otro de fuera del conjunto solución. Esta comprobación de dos números suele bastar para detectar un error de signo o un extremo mal incluido.

Regiones del plano y programación lineal

Propiedad: región solución de un sistema de inecuaciones lineales

Cada inecuación lineal $ax + by \leq c$ determina un semiplano limitado por la recta $ax + by = c$. La solución de un sistema es la intersección de todos esos semiplanos, una región limitada por segmentos. Sus **vértices** se obtienen resolviendo sistemas con las ecuaciones de las rectas frontera. Una función lineal $f(x, y) = px + qy$ alcanza su máximo y su mínimo en alguno de los vértices.

Ejemplo 6

Halla el máximo de $f(x, y) = 3x + 2y$ en la región $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 6$, $x \leq 4$.

Vértices: $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(4, 2)$ y $(0, 6)$. Valores: $f(0, 0) = 0$, $f(4, 0) = 12$, $f(4, 2) = 16$, $f(0, 6) = 12$. El máximo es 16 y se alcanza en el vértice $(4, 2)$.

¿Sabías que?

La programación lineal nació durante la Segunda Guerra Mundial para organizar el transporte de suministros y después se extendió a la industria. El matemático George Dantzig inventó en 1947 el método del símplex, que todavía se usa para decidir cómo repartir recursos limitados, desde las rutas de camiones hasta los horarios de las aerolíneas. Lo que has aprendido en este tema, con dos variables, es la versión «de papel y lápiz» de esos problemas gigantes.

Observación: comprobar con un punto de prueba

Después de resolver una inecuación conviene elegir un número de la solución y otro de fuera y sustituirlos en la inecuación original. El primero debe cumplirla y el segundo no. En las regiones del plano se hace lo mismo con un punto que no esté en la recta frontera, casi siempre el origen $(0, 0)$: si lo cumple, la región es el semiplano que contiene al origen; si no, es el otro semiplano. Esta comprobación tarda pocos segundos y evita muchos errores de signo.

El consejo de Otto

Después de resolver, comprueba con un número de dentro y otro de fuera del intervalo. ¡Es la manera más rápida de detectar un error de signo!