# Soluciones - Inecuaciones y sistemas de inecuaciones

Curso: 4 Eso

## Solución del ejercicio 1

a. Dividimos entre $-3$ e invertimos el sentido: $x > -4$. Intervalo $(-4, +\infty)$. Comprobación: $x = 0$ da $0$, cierto.
b. $-2x \geq -4$, luego $x \leq 2$. Intervalo $(-\infty, 2]$. Restamos 5 y dividimos entre $-2$, invirtiendo el sentido. Comprobación: $x = 0$ da $5 \geq 1$.
c. $3x - 3$, $x$. Intervalo $(-\infty, 7)$. Quitamos el paréntesis y agrupamos. Comprobación: $x = 0$ da $-3$.
d. Multiplicamos por 6: $3(x + 1) \geq 2(x - 2)$, $3x + 3 \geq 2x - 4$, $x \geq -7$. Intervalo $[-7, +\infty)$. Comprobación: $x = -7$ da $-3 \geq -3$, cierto.

## Solución del ejercicio 2

a. $2x + 3$, $x$: $(-\infty, 4)$. Restamos 3 y dividimos entre 2. Comprobación: $x = 0$ da $3$.
b. $\frac{x}{2} - 4 \geq -1$, $\frac{x}{2} \geq 3$, $x \geq 6$: $[6, +\infty)$. Sumamos 4 y multiplicamos por 2. Comprobación: $x = 6$ da $3 - 4 = -1$.
c. $x + 3x \leq 20$, $x \leq 5$: $(-\infty, 5]$. «Como mucho» se traduce por $\leq$; agrupamos $x + 3x = 4x$ y dividimos entre 4.
d. $x - 5 > 0$, $x > 5$: $(5, +\infty)$. «Positivo» significa mayor que cero.

## Solución del ejercicio 3

a. $x > 2$ y $x \leq 5$: $(2, 5]$. Resolvemos cada inecuación y nos quedamos con los números que cumplen las dos.
b. $3x$ da $x$; $-x$ da $x > -4$. Solución $(-4, -1)$. La segunda: restamos 5 y multiplicamos por $-1$, invirtiendo el sentido.
c. $x \geq 3$ y $x$: no hay ningún número que cumpla las dos. Conjunto vacío. Las dos soluciones no tienen puntos comunes.
d. $\frac{x}{2} > -1$ da $x > -2$; $-3x \geq -6$ da $x \leq 2$. Solución $(-2, 2]$. Comprobación con $x = 0$: $1 > 0$ y $4 \geq -2$.

## Solución del ejercicio 4

a. Raíces $2$ y $3$; la parábola abierta hacia arriba es negativa entre ellas: $(2, 3)$.
b. Raíces $-2$ y $2$; es $\geq 0$ fuera del intervalo abierto: $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.

c. $\Delta = 4 - 20$ y la parábola está siempre por encima del eje: solución todos los reales, $\mathbb{R}$.
d. $x(4 - x) \geq 0$: raíces $0$ y $4$; abierta hacia abajo, es positiva entre ellas: $[0, 4]$. Comprobación: $x = 2$ da $4 \geq 0$.

## Solución del ejercicio 5

a. Numerador cero en $1$; denominador cero en $-2$ (no incluido). Signo positivo fuera de $[-2, 1]$: $(-\infty, -2) \cup [1, +\infty)$.
b. Cambia de signo en $0$ y en $3$; es negativo entre ambos: $(0, 3)$.
c. $\dfrac{x+1}{x-2} - 1 \leq 0$, $\dfrac{3}{x-2} \leq 0$, luego $x - 2$ y $x$: $(-\infty, 2)$.
d. Porque $x - 2$ puede ser positivo o negativo y el sentido de la desigualdad cambia según el caso; es más seguro pasar todo a un miembro y estudiar signos.

## Solución del ejercicio 6

a. La frontera pasa por $(0, -1)$ y $(1, 1)$. Como la desigualdad es estricta ($>$), se dibuja discontinua.
b. $(0, 0)$: $0 > -1$, sí. $(1, 1)$: $1 > 1$ es falso, no. $(2, 4)$: $4 > 3$, sí.
c. $y \leq 3 - x$: región bajo la recta, frontera incluida (línea continua). $(2, 2)$: $4 \leq 3$ es falso, no pertenece.
d. No: los puntos de la frontera cumplen $y = 2x - 1$ y no $y > 2x - 1$.

## Solución del ejercicio 7

a. Es el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(4, 0)$ y $(0, 4)$.
b. Triángulo rectángulo de catetos $4$ y $4$: $A = \dfrac{4 \cdot 4}{2} = 8$.
c. $(1, 1)$ sí. $(3, 2)$ no ($3 + 2 = 5 > 4$). $(0, 4)$ sí (está en el vértice, la frontera se incluye).
d. Nueva región: $(0, 0)$, $(0, 4)$ y el corte de $y = x$ con $x + y = 4$, que es $(2, 2)$. Área $4$.

## Solución del ejercicio 8

a. $1{,}2c + 0{,}8b \leq 20$. El gasto total no puede superar 20 €.
b. $9{,}6 + 0{,}8b \leq 20$, $b \leq 13$: como máximo $13$ bolígrafos. Sustituimos $c = 8$ y despejamos $b$.
c. $1{,}2c + 8 \leq 20$, $c \leq 10$: como máximo $10$ cuadernos. Sustituimos $b = 10$ y despejamos $c$.
d. $14{,}4 + 4{,}8 = 19{,}2 \leq 20$: sí. $18 + 1{,}6 = 19{,}6 \leq 20$: sí. Respuesta: las dos compras son posibles.

## Solución del ejercicio 9

a. Taxi: $2{,}5 + 1{,}1x$. VTC: $4 + 0{,}8x$. Cada servicio tiene una parte fija y otra proporcional a los kilómetros.
b. $2{,}5 + 1{,}1x$, $0{,}3x$, $x$. El taxi es más barato para menos de $5$ km. Restamos $0{,}8x$ y 2,5 en los dos miembros y dividimos entre 0,3.
c. $3$ km: $5{,}80$ y $6{,}40$. $5$ km: $8$ y $8$. $10$ km: $13{,}50$ y $12$ €.
d. A $12$ km: taxi $15{,}70$ € y VTC $13{,}60$ €. Conviene el VTC y se ahorran $2{,}10$ €.

## Solución del ejercicio 10

a. $7{,}5 + 0{,}35n \leq 20$. El peso total del camión y las cajas no puede pasar de 20 t.
b. $0{,}35n \leq 12{,}5$, $n \leq 35{,}7$. Como $n$ es entero, como máximo $35$ cajas. Restamos 7,5 y dividimos entre 0,35.
c. $7{,}5 + 0{,}35 \cdot 35 = 19{,}75$ t. Comprobación: 19,75 t es menos que 20 t.
d. Si los dos vehículos cruzan juntos, $7{,}5 + 9{,}2 + 0{,}35n \leq 20$, $0{,}35n \leq 3{,}3$, $n \leq 9{,}43$. Como máximo $9$ cajas.

## Solución del ejercicio 11

a. $P = 2x + 2(20 - x) = 40$. $A(x) = x(20 - x) = 20x - x^2$.
b. $20x - x^2 \geq 75$, es decir $x^2 - 20x + 75 \leq 0$. Pasamos todo a un miembro y multiplicamos por $-1$.
c. Raíces $x = 5$ y $x = 15$; la parábola es negativa entre ellas: $x \in [5, 15]$. Comprobación: $x = 10$ da $100 \geq 75$.
d. El máximo está en $x = 10$: patio cuadrado de $10 \times 10$ y $A = 100$ m$^2$.

## Solución del ejercicio 12

a. $B(5) = 0$; $B(10) = -100 + 300 - 125 = 75$; $B(25) = -625 + 750 - 125 = 0$. Sustituimos cada valor en $B(x)$.
b. $-x^2 + 30x - 125 > 0$ equivale a $x^2 - 30x + 125$, con raíces $5$ y $25$: $5$.
c. Hay pérdidas con menos de $5$ lotes o con más de $25$. Fuera del intervalo $(5, 25)$ la parábola es negativa.
d. Vértice en $x = 15$: $B(15) = -225 + 450 - 125 = 100$, es decir $10\,000$ €.

## Solución del ejercicio 13

a. $-5t(t - 6) = 0$ en $t = 6$ s. Pasamos 4 al otro miembro y multiplicamos por $-1$, invirtiendo el sentido. Comprobación: $t = 3$ da $45 \geq 40$.

b. $-5t^2+30t \geq 40$, $t^2-6t+8 \leq 0$, $(t-2)(t-4) \leq 0$, luego $2 \leq t \leq 4$.
c. Entre $t=2$ y $t=4$: $2$ segundos. Respuesta: pasa 2 segundos por encima de 40 m.
d. $t^2-6t+9 \leq 0$ es $(t-3)^2 \leq 0$, que solo se cumple en $t=3$: ese es el instante de la altura máxima, $45$ m.

## Solución del ejercicio 14

a. $20 \leq k \leq 35$, $s \leq 3$ y $\dfrac{k}{s} \leq 15$ si reparte los kilómetros por igual.
b. A: $k=24$, $s=3$ (8 km por salida): cumple. B: $k=40$, $s=3$ (supera $35$): no cumple. C: $k=30$, $s=2$ ($15$ km por salida): cumple. D: $k=32$, $s=2$ ($16$ km por salida): no cumple.
c. B incumple $k \leq 35$; D incumple el máximo de $15$ km por salida.
d. Con tres salidas y $15$ km por salida serían $45$ km, pero la semana está limitada a $35$ km: el máximo es $35$ km.

## Solución del ejercicio 15

a. $300p+60f \leq 900$, $p \geq 1$, $f \geq 2$. Una inecuación limita las calorías y las otras dos el número mínimo de raciones.
b. Con $p=2$: $600+60f \leq 900$, $f \leq 5$ y $f \geq 2$. Combinaciones: $f=2,3,4,5$. Sustituimos $p=2$ y despejamos $f$.
c. Con $p=1$: $300+60f \leq 900$, $f \leq 10$. Sustituimos $p=1$. Respuesta: 10 raciones de fruta.
d. $2 \cdot 0{,}90+5 \cdot 0{,}40=1{,}80+2=3{,}80$ €. Multiplicamos cada precio por el número de raciones. Respuesta: 3,80 €.

## Solución del ejercicio 16

a. $g+v \leq 500$, $12g+20v \geq 7000$, $g \geq 0$, $v \geq 0$.
b. $(300,150)$: $450 \leq 500$ y $3600+3000=6600$, no cumple. $(400,100)$: $500 \leq 500$ y $4800+2000=6800$, no cumple. $(200,100)$: $300$ y $2400+2000=4400$, no cumple.
c. Con $g+v=500$ y $12g+20v=7000$: $g=500-v$, $6000+8v=7000$, $v=125$, $g=375$. La segunda recta corta al eje $v$ en $(0,350)$ y al eje $g$ en $\left(\dfrac{1750}{3},0\right) \approx (583{,}3;0)$, fuera del aforo. La región es el triángulo de vértices $(0,350)$, $(0,500)$ y $(375,125)$.
d. Con $v=500$ y $g=0$: $20 \cdot 500=10\,000$ €.
e. Cada entrada VIP deja $8$ € más que una general y ambas ocupan un asiento, luego para el aforo limitado conviene que todas sean VIP.

## Solución del ejercicio 17

a. $2x + 3y \leq 240$, $x + y \leq 100$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.
b. Vértices: $(0, 0)$, $(100, 0)$, $(0, 80)$ y el corte $2x + 3y = 240$, $x + y = 100$ que es $(60, 40)$.
c. $(0, 0)$: $0$; $(100, 0)$: $400$; $(0, 80)$: $400$; $(60, 40)$: $240 + 200 = 440$ €.
d. El máximo es $440$ € con $60$ coches y $40$ muñecos.
e. Sí: $2 \cdot 60 + 3 \cdot 40 = 240$ horas y $60 + 40 = 100$ juguetes; se agota todo.

## Solución del ejercicio 18

a. $\dfrac{1260}{x} \leq 150$ con $x > 0$. El coste por persona es el total dividido entre el número de personas.
b. $1260 \leq 150x$, $x \geq 8{,}4$. Con $x \leq 12$ y $x$ entero: $x \in \{9, 10, 11, 12\}$. Multiplicamos por $x$, que es positivo, y dividimos entre 150.
c. $x = 8$: $157{,}50$ €; $x = 9$: $140$ €; $x = 10$: $126$ €; $x = 12$: $105$ €. Dividimos 1 260 entre cada número de personas.
d. $140 - 105 = 35$ € por persona. Restamos los dos costes por persona.
e. $\dfrac{1260}{x} + 45$, $\dfrac{1260}{x}$, $x > 8{,}69$: desde $9$ personas. Comprobación: con 9 personas, $140 + 45 = 185$; con 8, $157{,}5 + 45 = 202{,}5$.

## Solución del ejercicio 19

a. $x^2$ da $(-3, 3)$; $2x \geq -4$ da $x \geq -2$. Intersección $[-2, 3)$. Resolvemos cada inecuación y tomamos la intersección. Comprobación: $x = 0$ cumple las dos.
b. $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2) \geq 0$ da $(-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$; con $x$: $(-\infty, -2] \cup [3, 5)$. La parábola es positiva fuera de sus raíces; después cortamos con $x$.
c. $\dfrac{x - 1}{x + 3} > 0$ da $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$; con $x \leq 4$: $(-\infty, -3) \cup (1, 4]$. Un cociente es positivo si numerador y denominador tienen el mismo signo.
d. $-3$, es decir $x > -1$ y $x$: $(-1, 5)$. El valor absoluto menor que 3 significa estar a menos de 3 unidades de 2.

## Solución del ejercicio 20

a. Debe ser $\Delta = k^2 - 4$, es decir $-2$. Si el discriminante es negativo, la parábola no corta al eje y, como se abre hacia arriba, siempre es positiva.
b. $a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 \geq 0$, luego $a^2 + b^2 \geq 2ab$, con igualdad cuando $a = b$.
c. Lados $x$ y $12 - x$ con $0$: $A = x(12 - x) = 36 - (x - 6)^2 \leq 36$. Por tanto $0$, con máximo para $x = 6$ (un cuadrado).

d. $(x-2)^2 \leq 0$ solo se cumple para $x = 2$: la solución es el conjunto $\{2\}$. Un cuadrado nunca es negativo, solo puede valer cero.