Apuntes - Geometría analítica: la recta (Matemáticas B)

Curso: 4 Eso

En este tema aprenderás: vectores en el plano, ecuaciones de la recta, posición relativa de dos rectas, distancia de un punto a una recta y aplicaciones. Cada idea va en un cuadro de color, con ejemplos resueltos paso a paso.

Actividad de introducción: ¿dónde estamos?

Las aplicaciones de mapas del móvil sitúan cada lugar con dos números, su longitud y su latitud, y calculan distancias, rutas y puntos medios con operaciones muy parecidas a las que se estudian en este tema. Imagina un plano de tu barrio con cuadrículas: el colegio en $(2, 3)$ y la biblioteca en $(8, 11)$. ¿A qué distancia están? ¿Dónde está el punto medio, para quedar con un amigo a medio camino? ¿Cómo se escribe la recta que une los dos edificios? ¿Qué distancia hay desde tu casa hasta una avenida recta? La **geometría analítica** responde a todo esto usando coordenadas, vectores y ecuaciones, y convierte problemas de dibujo en problemas de cálculo.

Vectores en el plano

Definición: vector fijo

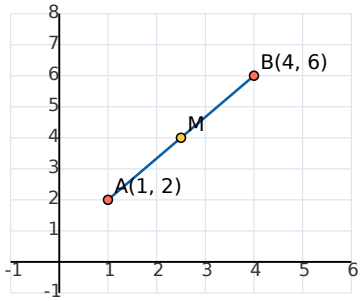
Un **vector fijo** $\overrightarrow{AB}$ tiene origen $A(x_1, y_1)$ y extremo $B(x_2, y_2)$; sus **componentes** son $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Su **módulo** (longitud) es $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, que es también la **distancia** entre A y B. Los vectores se suman componente a componente y se multiplican por un número multiplicando ambas componentes.

Ejemplo 1

Para $A(1, 2)$ y $B(4, 6)$: $\overrightarrow{AB} = (3, 4)$ y $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Definición: punto medio

El **punto medio** del segmento AB es $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$. Aquí $M = (2{,}5;\ 4)$.



Ecuaciones de la recta

Definición: vector director

Una recta queda determinada por un punto $P(x_0, y_0)$ y un **vector director** $\vec{v} = (v_1, v_2)$ (paralelo a la recta). Sus ecuaciones son:

- **Paramétricas:** $x = x_0 + t\,v_1$, $y = y_0 + t\,v_2$, con $t \in \mathbb{R}$.
- **Continua:** $\dfrac{x - x_0}{v_1} = \dfrac{y - y_0}{v_2}$.
- **Punto-pendiente:** $y - y_0 = m(x - x_0)$, con $m = \dfrac{v_2}{v_1}$.
- **Explícita:** $y = mx + n$.
- **General:** $Ax + By + C = 0$; entonces $m = -\dfrac{A}{B}$ y un vector director es $(B, -A)$.

Ejemplo 2

Recta que pasa por $P(1,1)$ con $\vec{v} = (2,3)$: paramétricas $x = 1 + 2t$, $y = 1 + 3t$; continua $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3}$; quitando denominadores, $3(x-1) = 2(y-1)$, es decir, $3x - 2y - 1 = 0$.

Ejemplo 3

Recta por $A(-1,2)$ y $B(3,4)$: , $m = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Punto-pendiente: $y - 2 = \frac{1}{2}(x+1)$. Explícita: $y = \frac{x}{2} + \frac{5}{2}$. General: $x - 2y + 5 = 0$.

Propiedad

Para pasar de general a explícita se despeja y: $2x + 3y - 6 = 0 \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + 2$. Los cortes con los ejes salen haciendo $x = 0$ (eje Y) o $y = 0$ (eje X): $(0,2)$ y $(3,0)$.

Un punto pertenece a una recta si sus coordenadas cumplen la ecuación: $P(2,-1)$ está en $3x + 2y - 4 = 0$ porque $6 - 2 - 4 = 0$.

Cómo se hace: hallar la ecuación de la recta que pasa por dos puntos

1. Calcula el vector director $\vec{v} = B - A$.
2. Obtén la pendiente $m = \frac{v_2}{v_1}$ (si $v_1 \neq 0$).
3. Escribe la ecuación punto-pendiente $y - y_A = m(x - x_A)$.
4. Pasa a la forma general $Ax + By + C = 0$ y comprueba con el otro punto.

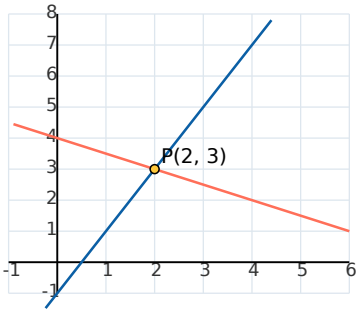
Posición relativa de dos rectas

Propiedad: posición relativa de dos rectas

- **Paralelas:** misma pendiente ($m = m'$) y distinta ordenada. Con ecuaciones generales, $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$.
- **Coincidentes:** misma pendiente y misma ordenada.
- **Secantes:** pendientes distintas; se cortan en un punto, que se halla resolviendo el sistema.
- **Perpendiculares:** $m \cdot m' = -1$, o sea $m' = -\frac{1}{m}$.

Ejemplo 4

$2x - y + 1 = 0$ **y** $4x - 2y + 5 = 0$ **tienen** $m = 2$ **las dos, y ordenadas** 1 **y** $\frac{5}{2}$ son paralelas.



Distancia de un punto a una recta

Propiedad

La distancia del punto $P(x_0, y_0)$ a la recta $r:\ Ax + By + C = 0$ es

$$d(P, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Por ejemplo, la distancia de $P(1, 2)$ a $3x + 4y - 5 = 0$ es $\frac{|3+8-5|}{5} = \frac{6}{5} = 1{,}2$.

Ejemplo 5: distancia a una recta

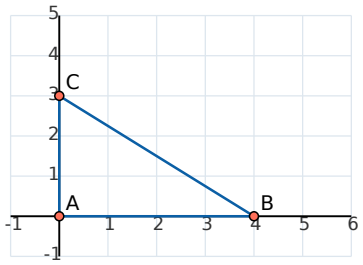
Calcula la distancia del punto $P(2,1)$ a la recta $3x-4y+5=0$.

$d=\frac{|3\cdot 2-4\cdot 1+5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{7}{5}=1{,}4$ unidades.

Aplicaciones

Propiedad

La geometría analítica permite estudiar figuras con álgebra. Tres puntos están **alineados** si las pendientes de AB y BC coinciden. Para completar un **paralelogramo** $ABCD$ se usa $D=A+C-B$. Un triángulo de vértices $A(0,0)$, $B(4,0)$ y $C(0,3)$ tiene lados 4, 3 y $\sqrt{16+9}=5$, perímetro 12 y área $\frac{4\cdot 3}{2}=6$.



Ejemplo 6: punto medio y distancia

Dados $A(-1,2)$ y $B(5,10)$, halla el punto medio y la distancia entre ellos.

Punto medio: $M=\left(\frac{-1+5}{2},\frac{2+10}{2}\right)=(2,6)$. Distancia:

¡Atención! Errores frecuentes

- Restar en distinto orden en las dos componentes del vector.
- Confundir el signo de m al pasar de la forma general a la explícita: $m=-\frac{A}{B}$.
- Olvidar la raíz cuadrada en la distancia entre puntos.
- Decir que dos rectas son perpendiculares porque tienen pendientes opuestas (2 y -2); deben ser opuestas e inversas (2 y $-\frac{1}{2}$).

Rectas notables y construcciones

Definición: mediatriz de un segmento

La **mediatriz** de un segmento AB es el conjunto de puntos del plano que están a la misma distancia de A y de B. Es la recta perpendicular al segmento que pasa por su

punto medio. Se obtiene imponiendo $d(P,A) = d(P,B)$ con $P(x,y)$ y simplificando: los términos cuadráticos se cancelan y queda una ecuación lineal.

Ejemplo 5

Halla la mediatriz del segmento de extremos $A(0,0)$ y $B(4,2)$.

Imponemos $x^2 + y^2 = (x-4)^2 + (y-2)^2$. Desarrollando: $0 = -8x + 16 - 4y + 4$, es decir $8x + 4y - 20 = 0$, o $2x + y - 5 = 0$. Comprobación: el punto medio $(2,1)$ cumple $4 + 1 - 5 = 0$ y el vector normal $(2,1)$ es paralelo a .

Regla: rectas paralelas y perpendiculares

- Dos rectas son **paralelas** si sus pendientes son iguales ($m_1 = m_2$) o sus vectores directores son proporcionales.
- Son **perpendiculares** si $m_1 \cdot m_2 = -1$, o si el producto escalar de sus vectores directores es cero.
- Para obtener la paralela a $Ax + By + C = 0$ por un punto, se conservan A y B y se calcula C con las coordenadas del punto.
- Para la perpendicular, se intercambian los coeficientes y se cambia un signo: $Bx - Ay + D = 0$.

Ejemplo 6

Halla la recta perpendicular a $y = 2x + 1$ por el punto $(4,3)$.

La pendiente buscada es $-\frac{1}{2}$. Entonces $y - 3 = -\frac{1}{2}(x-4)$, es decir $y = -\frac{1}{2}x + 5$, o $x + 2y - 10 = 0$. Comprobación: $4 + 6 - 10 = 0$.

¡Atención! Errores habituales

- El vector se calcula restando **final menos inicial**: $B - A$.
- En la fórmula de la distancia punto-recta, el valor absoluto del numerador evita distancias negativas, y la ecuación debe estar en forma general.
- Una recta vertical no tiene pendiente: se escribe $x = a$.
- La distancia entre dos puntos es una raíz: no olvides el cuadrado de cada diferencia.
- Al comprobar que un punto pertenece a una recta, sustituye **las dos** coordenadas.

Elegir la forma de la ecuación

La forma **explícita** $y = mx + n$ es la mejor para ver la pendiente y representar. La **general** $Ax + By + C = 0$ sirve para calcular distancias y estudiar posiciones relativas. La **vectorial** y las **paramétricas** son útiles para describir movimientos, como un dron o un barco, y la **continua** aparece cuando se conoce un punto y un vector director. Saber pasar de una a otra permite escoger siempre la más cómoda, y practicar los cambios de forma con distintos ejemplos es la mejor manera de ganar seguridad.

Problemas de geometría con coordenadas

Método: resolver un problema geométrico con coordenadas

1. Coloca los datos en unos ejes y anota las coordenadas de todos los puntos.
2. Decide qué hay que calcular: una distancia, un punto medio, una recta o un punto de corte.
3. Escribe las ecuaciones necesarias: de la recta que une dos puntos, de la perpendicular o de la mediatriz.
4. Resuelve el sistema o aplica la fórmula correspondiente.
5. Comprueba el resultado con un dibujo aproximado y con una segunda vía de cálculo, por ejemplo calculando el mismo área de dos maneras.

Ejemplo 7

Calcula el área del triángulo de vértices $A(0,0)$, $B(6,0)$ y $C(2,4)$ y la longitud de la altura desde C.

La base AB está sobre el eje X y mide 6. La distancia de C a la recta $y = 0$ es 4, que es la altura. El área es $\frac{6 \cdot 4}{2} = 12$. Comprobación con otro lado: $AC = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$, la recta AC es $2x - y = 0$ y la distancia de B a ella es $\frac{12}{\sqrt{5}}$; el área es $\frac{\sqrt{20} \cdot 12/\sqrt{5}}{2} = \frac{2\sqrt{5} \cdot 12}{2\sqrt{5}} = 12$. Coincide.

Ejemplo 8

Un pozo está en $P(2,5)$ y una tubería recta pasa por $A(0,1)$ y $B(4,3)$. ¿A qué distancia está el pozo de la tubería?

Pendiente $\frac{3-1}{4-0} = \frac{1}{2}$, recta $y = \frac{1}{2}x + 1$, es decir $x - 2y + 2 = 0$. Distancia: $\frac{|2 - 10 + 2|}{\sqrt{1+4}} = \frac{6}{\sqrt{5}} \approx 2{,}68$ unidades.

¿Sabías que?

La geometría analítica nació en el siglo XVII con las ideas de René Descartes y Pierre de Fermat, que unieron el álgebra y la geometría. Gracias a ellos, una recta puede escribirse como una ecuación y un problema geométrico puede resolverse con cálculos. Hoy se usa en el GPS, en los videojuegos, en los robots de almacén y en los programas de diseño que dibujan piezas en tres dimensiones.

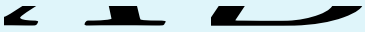
Comprobar resultados con coordenadas

Método: verificar que un punto está en una recta

1. Escribe la recta en forma general $Ax + By + C = 0$ o en forma explícita.
2. Sustituye las coordenadas del punto en la ecuación.
3. Si la igualdad se cumple, el punto pertenece a la recta; si no, el resultado indica a qué lado está.
4. Haz esta comprobación siempre que calcules un punto de corte: debe cumplir las ecuaciones de las dos rectas.

Ejemplo 9

Comprueba que el triángulo de vértices $A(0,0)$, $B(4,0)$ y $C(4,3)$ es rectángulo y calcula su área.



Calculamos los vectores de los lados: y . El primero es horizontal y el segundo vertical, así que forman un ángulo recto en B. Las longitudes son $AB = 4$, $BC = 3$ y $AC = \sqrt{16 + 9} = 5$, y se cumple el teorema de Pitágoras: $4^2 + 3^2 = 5^2$. Como los catetos miden 4 y 3, el área es $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ unidades cuadradas.

Observación: vector director y vector normal

En la recta $Ax + By + C = 0$, el vector (A, B) es perpendicular a la recta (vector normal) y el vector $(-B, A)$ tiene su misma dirección (vector director). Por eso dos rectas son perpendiculares cuando el vector normal de una es director de la otra.

El consejo de Otto

Si el enunciado te da dos puntos, calcula primero el vector entre ellos: de él salen la pendiente, la dirección y todas las ecuaciones.