Ejercicios - Geometría analítica: la recta (Matemáticas B)

Curso: 4 Eso · 20

Se debe mostrar el desarrollo de cada ejercicio.

Ejercicio 1

Ejercicio 1 – Vector entre dos puntos y módulo

Calcula las componentes del vector y su módulo.

a. $P(1,2)$ y $Q(4,6)$
b. $P(-2,3)$ y $Q(1,-1)$
c. $P(0,0)$ y $Q(5,12)$
d. $P(-2,-3)$ y $Q(4,5)$

Ejercicio 2

Ejercicio 2 – Punto medio y simétrico

Resuelve con las coordenadas del punto medio $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$.

a. Punto medio de $A(2,-4)$ y $B(8,6)$.
b. $M(1,2)$ es el punto medio de AB con $A(-3,4)$. Halla B.
c. Simétrico de $A(2,-4)$ respecto del punto $M(3,1)$.
d. Baricentro del triángulo $(0,0)$, $(6,0)$, $(3,9)$ (media de las coordenadas de los vértices).

Ejercicio 3

Ejercicio 3 – Operaciones con vectores

Sean $\vec{u}=(2,-1)$ y $\vec{v}=(-3,4)$.

a. Calcula $\vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{u}-\vec{v}$.
b. Calcula $2\vec{u}-\vec{v}$.
c. Calcula los módulos $|\vec{u}|$ y $|\vec{v}|$.
d. Halla el vector unitario en la dirección de $\vec{v}$.

Ejercicio 4

Ejercicio 4 – Ecuaciones de la recta

Escribe todas las ecuaciones de la recta que pasa por $A(1, 2)$ con vector director $\vec{d} = (3, -2)$.

a. Ecuación vectorial y ecuaciones paramétricas.
b. Ecuación continua.
c. Ecuación general $Ax + By + C = 0$.
d. Calcula la pendiente y comprueba que el punto obtenido con $t = 1$ pertenece a la recta.

Ejercicio 5

Ejercicio 5 – Recta por dos puntos

Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos dados, en forma explícita y general.

a. $A(-1, 3)$ y $B(2, 9)$
b. $A(0, 4)$ y $B(6, 0)$
c. $A(2, 5)$ y $B(2, -1)$
d. $A(-3, 1)$ y $B(5, 1)$

Ejercicio 6

Ejercicio 6 – Pasar de una forma a otra

La recta r tiene ecuación general $2x - 3y + 6 = 0$.

a. Escribe su ecuación explícita y su pendiente.
b. Halla un vector director y un vector normal.
c. Calcula los puntos de corte con los ejes.
d. Escribe sus ecuaciones paramétricas con un punto y el vector director.

Ejercicio 7

Ejercicio 7 – Posición relativa de dos rectas

Estudia si cada pareja de rectas es secante, paralela o coincidente. Si son secantes, halla el punto de corte.

a. $x + y - 3 = 0$ y $2x + 2y - 8 = 0$
b. $x - 2y + 1 = 0$ y $3x - 6y + 3 = 0$
c. $2x + y - 5 = 0$ y $x - y + 2 = 0$
d. $x + 2y - 4 = 0$ y $2x - y + 3 = 0$ (¿son perpendiculares?)

Ejercicio 8

Ejercicio 8 – Distancia de un punto a una recta

Usa la fórmula $d(P,r) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

a. $P(1,2)$ y $r:\ 3x+4y-5=0$
b. $P(0,0)$ y $r:\ x+y-4=0$
c. $P(2,-1)$ y $r:\ 5x-12y+3=0$
d. $P(1,1)$ y $r:\ x+y-2=0$ (interpreta el resultado)

Ejercicio 9

Ejercicio 9 – El mapa de senderismo

En el mapa de una ruta por los Picos de Europa, las coordenadas se miden en kilómetros desde un punto de referencia. El refugio A está en $(2,3)$, el refugio B en $(8,11)$ y la cima C en $(11,7)$.

a. Calcula la distancia entre los refugios A y B y el tiempo a 4 km/h.
b. Halla las coordenadas del punto medio del tramo AB, donde se instala un puesto de agua.
c. Calcula las distancias AC y BC. ¿Qué refugio está más cerca de la cima?
d. Calcula el perímetro del triángulo ABC.

Ejercicio 10

Ejercicio 10 – La parcela triangular

Una parcela de un pueblo de Segovia tiene forma de triángulo con vértices $A(0,0)$, $B(8,0)$ y $C(3,6)$, con las coordenadas en decámetros (1 dam $=10$ m).

a. Calcula la longitud de cada lado en metros (redondea a las décimas).
b. Calcula el perímetro y el coste de vallarla a 12 € el metro.
c. Calcula el área en m^2 tomando AB como base.
d. Halla la ecuación general de la recta que contiene al lado AC.

Ejercicio 11

Ejercicio 11 – La trayectoria del dron

Un dron de vigilancia forestal en Galicia sale del origen $(0,0)$ y vuela en línea recta pasando por $P(6,8)$ (coordenadas en km).

a. Escribe la ecuación general de su trayectoria.
b. ¿Pasa por el punto $(9,12)$?
c. Una torre de vigilancia está en $T(10,2)$. Calcula su distancia a la trayectoria.
d. ¿A qué distancia del origen está el dron cuando llega a P?

Ejercicio 12

Ejercicio 12 – La carretera y el pueblo

Una carretera recta de la sierra de Madrid tiene por ecuación $3x + 4y - 12 = 0$ (en km). Hay dos pueblos: $P(5, 6)$ y $Q(4, 0)$.

a. Calcula la distancia de cada pueblo a la carretera.
b. Halla el pie de la perpendicular desde P a la carretera (punto más cercano).
c. Comprueba que la distancia de P a ese punto coincide con la del apartado a).
d. Si se construye un ramal recto desde P hasta la carretera a 60 km/h, ¿cuánto tarda en recorrerlo?

Ejercicio 13

Ejercicio 13 – El cable entre dos postes

Un cable une las cabezas de dos postes de 8 m y 12 m de altura separados 20 m. Se toma el origen en la base del primer poste, con el eje X en el suelo.

a. Escribe las coordenadas de los extremos y la ecuación del cable en forma explícita.
b. Calcula la altura del cable a 10 m del primer poste.
c. Calcula la longitud del cable.
d. Se quiere colgar un farol a $9{,}5$ m de altura. ¿A qué distancia del primer poste debe estar?

Ejercicio 14

Ejercicio 14 – Dos barcos y su punto de cruce

En una bahía de Cantabria, un barco A sale del puerto $(0, 0)$ con dirección $(2, 1)$ y otro barco B sale de $(10, 0)$ con dirección $(-1, 1)$ (coordenadas en km).

a. Escribe la ecuación general de cada trayectoria.
b. Halla el punto donde se cruzan.
c. Calcula la distancia que recorre cada barco hasta ese punto.
d. Si A navega a 15 km/h y B a 10 km/h, ¿llegan a la vez al punto de cruce? ¿Hay riesgo de colisión?

Ejercicio 15

Ejercicio 15 – Medianas y baricentro

Un triángulo tiene vértices $A(0, 0)$, $B(6, 0)$ y $C(2, 6)$.

a. Halla los puntos medios de BC y de AC.
b. Escribe la ecuación general de la mediana desde A y de la mediana desde B.
c. Calcula el baricentro G como media de los vértices.

d. Comprueba que G pertenece a las dos medianas.
e. Calcula el área del triángulo y la distancia de G al lado AB.

Ejercicio 16

Ejercicio 16 – El paralelogramo

Los puntos $A(1,1)$, $B(5,2)$ y $C(6,5)$ son tres vértices consecutivos de un paralelogramo $ABCD$.

a. Calcula el cuarto vértice D con $D = A + C - B$.
b. Comprueba que .
c. Comprueba que las diagonales se cortan en su punto medio.
d. Calcula el perímetro y el área (área $= |x_1 y_2 - x_2 y_1|$ con los vectores y).

Ejercicio 17

Ejercicio 17 – El router equidistante

Dos oficinas de un edificio de Bilbao están en $A(2,1)$ y $B(8,5)$ (en metros sobre el plano). Se quiere instalar un router que esté a la misma distancia de las dos, sobre la mediatriz de AB.

a. Calcula el punto medio de AB y el vector .
b. Plantea la condición $d(P,A) = d(P,B)$ y obtén la ecuación de la mediatriz.
c. Comprueba que el punto medio y el punto $(7,0)$ están en la mediatriz.
d. Calcula la distancia del router a cada oficina si se coloca en $(7,0)$ y en el punto medio.

Ejercicio 18

Ejercicio 18 – Paralela y perpendicular

Sea la recta $r:\ 2x + 3y - 6 = 0$ y el punto $P(1,1)$.

a. Calcula la pendiente de r.
b. Halla la recta paralela a r que pasa por P.
c. Halla la recta perpendicular a r que pasa por P.
d. Calcula la distancia entre r y su paralela por P.

Ejercicio 19

Ejercicio 19 – El triángulo isósceles

Los vértices de un triángulo son $A(1,1)$, $B(7,1)$ y $C(4,5)$.

a. Calcula la longitud de los tres lados y comprueba que es isósceles.
b. Calcula el perímetro.
c. Calcula el área con la distancia de C a la recta AB.
d. Calcula la ecuación de la recta AC y la distancia de B a ella. Comprueba el área otra vez.
e. ¿Coincide la altura desde C con la mediana desde C? Razona.

Ejercicio 20

Ejercicio 20 – Desafío analítico

Resuelve estos retos.

a. Halla k para que $kx + 2y - 3 = 0$ sea paralela a $3x + 4y + 1 = 0$ y para que sea perpendicular.
b. Calcula la distancia entre las rectas paralelas $3x + 4y - 5 = 0$ y $3x + 4y + 10 = 0$.
c. Halla el punto de la recta $y = x$ más cercano a $P(0,4)$ y la distancia mínima.
d. Demuestra que el triángulo de vértices $(0,0)$, $(4,0)$ y $(2,2\sqrt{3})$ es equilátero.