Soluciones - Geometría analítica: la recta (Matemáticas B)

Curso: 4 Eso

Solución del ejercicio 1

a.  y . Restamos las coordenadas del origen a las del extremo; el módulo es la raíz de la suma de los cuadrados de las componentes.

b.  y . Las componentes cambian de signo respecto del primer caso, pero el módulo es el mismo: $\sqrt{9+16}=5$.

c.  y . Como P es el origen, las componentes del vector coinciden con las coordenadas de Q.

d.  y . Comprobación: el vector es el doble de $(3,4)$, así que su módulo es el doble de 5.

Solución del ejercicio 2

a. $M=\left(\frac{2+8}{2},\frac{-4+6}{2}\right)=(5,1)$. Hacemos la media de las abscisas y la media de las ordenadas.

b. $\frac{-3+x}{2}=1$ da $x=5$ y $\frac{4+y}{2}=2$ da $y=0$: $B(5,0)$. Despejamos cada coordenada de B de la fórmula del punto medio. Comprobación: $\left(\frac{-3+5}{2},\frac{4+0}{2}\right)=(1,2)$.

c. $A_1=2M-A=(6-2,2+4)=(4,6)$. M es el punto medio entre A y su simétrico, por eso $A_1=2M-A$.

d. $G=\left(\frac{0+6+3}{3},\frac{0+0+9}{3}\right)=(3,3)$. El baricentro es el punto donde se cortan las tres medianas.

Solución del ejercicio 3

a. $\vec{u}+\vec{v}=(-1,3)$ y $\vec{u}-\vec{v}=(5,-5)$. Sumamos y restamos componente a componente.

b. $2\vec{u} - \vec{v} = (4, -2) - (-3, 4) = (7, -6)$. Primero multiplicamos $\vec{u}$ por 2 y después restamos $\vec{v}$.
c. $|\vec{u}| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} \approx 2{,}24$ y $|\vec{v}| = \sqrt{9+16} = 5$. El módulo es la raíz de la suma de los cuadrados de las componentes.
d. $\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \left(-\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$, de módulo 1. Dividimos cada componente entre el módulo, 5; el vector obtenido tiene la misma dirección y sentido que $\vec{v}$.

Solución del ejercicio 4

a. $(x, y) = (1, 2) + t(3, -2)$; paramétricas $x = 1 + 3t$, $y = 2 - 2t$. El parámetro t recorre todos los puntos de la recta.
b. $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{-2}$. Despejamos t en las dos paramétricas e igualamos.
c. $-2(x-1) = 3(y-2)$, es decir $2x + 3y - 8 = 0$. Multiplicamos en cruz y pasamos todo a un miembro.
d. Pendiente $m = \dfrac{-2}{3}$. Con $t = 1$: $(4, 0)$; $2 \cdot 4 + 0 - 8 = 0$. Pertenece. La pendiente es el cociente entre las componentes del vector director.

Solución del ejercicio 5

a. Vector $(3, 6)$, pendiente 2: $y - 3 = 2(x+1)$, $y = 2x + 5$, o $2x - y + 5 = 0$. Comprobación con B: $4 - 9 + 5 = 0$.
b. Pendiente $\dfrac{0-4}{6-0} = -\dfrac{2}{3}$: $y = -\dfrac{2}{3}x + 4$, o $2x + 3y - 12 = 0$. Comprobación con A: $0 + 12 - 12 = 0$.
c. Los dos puntos tienen $x = 2$: recta vertical $x = 2$ (no es función). Su pendiente no existe porque el vector director es $(0, -6)$.
d. Los dos puntos tienen $y = 1$: recta horizontal $y = 1$. Su pendiente es 0.

Solución del ejercicio 6

a. $3y = 2x + 6$, $y = \dfrac{2}{3}x + 2$; pendiente $\dfrac{2}{3}$. Despejamos y.
b. Director $\vec{d} = (3, 2)$ (o $(B, -A)$ con signo adecuado); normal $\vec{n} = (2, -3)$ (los coeficientes de x e y). Un vector director debe cumplir $2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 = 0$.
c. Eje Y: $(0, 2)$. Eje X: $2x + 6 = 0$, $x = -3$: punto $(-3, 0)$. Hacemos $x = 0$ y luego $y = 0$.
d. Con $(0, 2)$ y $(3, 2)$ de director: $x = 3t$, $y = 2 + 2t$.

Solución del ejercicio 7

a. Coeficientes: $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq \frac{-3}{-8}$. Paralelas.

b. $\frac{1}{3} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$. Coincidentes (son la misma recta).

c. $\frac{2}{1} \neq \frac{1}{-1}$. Secantes: sumando, $3x - 3 = 0$, $x = 1$, $y = 3$. Punto $(1, 3)$.

d. Secantes: $x = 4 - 2y$ en la segunda: $8 - 4y - y + 3 = 0$, $y = \frac{11}{5}$ y $x = -\frac{2}{5}$.

Pendientes $-\frac{1}{2}$ y 2: su producto es -1, luego son perpendiculares.

Solución del ejercicio 8

a. $d = \frac{|3 + 8 - 5|}{5} = \frac{6}{5} = 1{,}2$. Sustituimos el punto en la ecuación de la recta y dividimos entre $\sqrt{9 + 16} = 5$.

b. $d = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83$. Sustituimos el origen y dividimos entre $\sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$.

c. $d = \frac{|10 + 12 + 3|}{13} = \frac{25}{13} \approx 1{,}92$. El denominador es $\sqrt{25 + 144} = 13$.

d. $d = \frac{|1 + 1 - 2|}{\sqrt{2}} = 0$: el punto está sobre la recta. Si la distancia es cero, el punto cumple la ecuación de la recta.

Solución del ejercicio 9

a. , $d = \sqrt{36 + 64} = 10$ km. Tiempo $\frac{10}{4} = 2{,}5$ h. Restamos las coordenadas de A a las de B y calculamos el módulo; el tiempo es distancia entre velocidad.

b. $M = \left(\frac{2 + 8}{2}, \frac{3 + 11}{2}\right) = (5, 7)$. Hacemos la media de cada coordenada.

c. $AC = \sqrt{81 + 16} = \sqrt{97} \approx 9{,}85$ km y $BC = \sqrt{9 + 16} = 5$ km. El refugio B está más cerca.

d. $P = 10 + 9{,}85 + 5 = 24{,}85$ km. Respuesta: unos 24,85 km.

Solución del ejercicio 10

a. $AB = 80$ m. $AC = \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45} \approx 6{,}7$ dam $= 67{,}1$ m.

$BC = \sqrt{25 + 36} = \sqrt{61} \approx 7{,}8$ dam $= 78{,}1$ m. Usamos la fórmula de la distancia entre dos puntos y multiplicamos por 10 para pasar a metros.

b. Perímetro $\approx 80 + 67{,}1 + 78{,}1 = 225{,}2$ m. Coste $\approx 225{,}2 \cdot 12 = 2702{,}4$ €.

c. Base 8 dam y altura 6 dam: $A = \dfrac{8 \cdot 6}{2} = 24$ dam$^2 = 2400$ m^2. La altura es la ordenada de C, porque AB está sobre el eje X.

d. Dirección $(3, 6) \propto (1, 2)$: $y = 2x$, es decir $2x - y = 0$ (el punto C la cumple: $6 - 6 = 0$).

Solución del ejercicio 11

a. Pendiente $\dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3}$: $y = \dfrac{4}{3}x$, es decir $4x - 3y = 0$. La recta pasa por el origen, así que su ordenada en el origen es cero.

b. $4 \cdot 9 - 3 \cdot 12 = 0$: sí pasa. Sustituimos el punto en la ecuación.

c. $d = \dfrac{|40 - 6|}{5} = \dfrac{34}{5} = 6{,}8$ km. Aplicamos la fórmula de la distancia con $A = 4$, $B = -3$ y $C = 0$; el denominador es 5.

d. $d = \sqrt{36 + 64} = 10$ km. Respuesta: el dron está a 10 km del origen.

Solución del ejercicio 12

a. $d(P) = \dfrac{|15 + 24 - 12|}{5} = \dfrac{27}{5} = 5{,}4$ km. $d(Q) = \dfrac{|12 + 0 - 12|}{5} = 0$: Q está en la carretera. Aplicamos la fórmula de la distancia con denominador $\sqrt{9 + 16} = 5$.

b. La recta perpendicular por P tiene dirección $(3, 4)$: $(5 + 3s, 6 + 4s)$. Sustituyendo, $3(5 + 3s) + 4(6 + 4s) - 12 = 0$, $27 + 25s = 0$, $s = -\dfrac{27}{25}$. Pie: $\left(\dfrac{44}{25}, \dfrac{42}{25}\right) = (1{,}76;\ 1{,}68)$. La perpendicular tiene como dirección el vector normal de la carretera.

c. $\sqrt{(5 - 1{,}76)^2 + (6 - 1{,}68)^2} = \sqrt{10{,}4976 + 18{,}6624} = \sqrt{29{,}16} = 5{,}4$ km.

d. $\dfrac{5{,}4}{60} = 0{,}09$ h, es decir $5{,}4$ minutos. Respuesta: unos 5,4 minutos.

Solución del ejercicio 13

a. Extremos $(0, 8)$ y $(20, 12)$. Pendiente $\dfrac{4}{20} = 0{,}2$: $y = 0{,}2x + 8$. La pendiente es la diferencia de alturas entre la distancia horizontal.

b. $y(10) = 2 + 8 = 10$ m. Sustituimos $x = 10$.

c. $L = \sqrt{20^2 + 4^2} = \sqrt{416} \approx 20{,}4$ m. La longitud es la distancia entre los dos

extremos.

d. $0{,}2x + 8 = 9{,}5$, $x = 7{,}5$ m. Despejamos x. Respuesta: a 7,5 m del primer poste.

Solución del ejercicio 14

a. A: $x - 2y = 0$. B: $x + y - 10 = 0$.

b. $x = 2y$ en la segunda: $3y = 10$, $y = \frac{10}{3}$, $x = \frac{20}{3}$. Punto $\left(\frac{20}{3}, \frac{10}{3}\right) \approx (6{,}67;\ 3{,}33)$.

c. A: $\sqrt{\left(\frac{20}{3}\right)^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2} = \frac{10\sqrt{5}}{3} \approx 7{,}45$ km. B:

$\sqrt{\left(\frac{10}{3}\right)^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2} = \frac{10\sqrt{2}}{3} \approx 4{,}71$ km.

d. A tarda $\frac{7{,}45}{15} \approx 0{,}50$ h y B tarda $\frac{4{,}71}{10} \approx 0{,}47$ h. No llegan a la vez (difieren unos 2 min), así que no chocan, pero conviene vigilar el paso.

Solución del ejercicio 15

a. $M_{BC} = (4, 3)$ y $M_{AC} = (1, 3)$.

b. Mediana desde A: pasa por $(0, 0)$ y $(4, 3)$: $3x - 4y = 0$. Desde B: pasa por $(6, 0)$ y $(1, 3)$: pendiente $-\frac{3}{5}$, $3x + 5y - 18 = 0$.

c. $G = \left(\frac{0 + 6 + 2}{3}, \frac{0 + 0 + 6}{3}\right) = \left(\frac{8}{3}, 2\right)$.

d. $3 \cdot \frac{8}{3} - 4 \cdot 2 = 0$ y $3 \cdot \frac{8}{3} + 5 \cdot 2 - 18 = 0$. Cumple las dos.

e. Área $= \frac{6 \cdot 6}{2} = 18$. La distancia de G a AB ($y = 0$) es 2, un tercio de la altura 6.

Solución del ejercicio 16

a. $D = (1 + 6 - 5,\ 1 + 5 - 2) = (2, 4)$.

b. y . Dos vectores iguales tienen las mismas componentes: los lados son paralelos e iguales.

c. Punto medio de AC: $(3{,}5;\ 3)$. Punto medio de BD: $\left(\frac{5 + 2}{2}, \frac{2 + 4}{2}\right) = (3{,}5;\ 3)$. Los dos puntos medios coinciden.

d. $AB = \sqrt{17}$, $AD = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$: perímetro $2(\sqrt{17} + \sqrt{10}) \approx 14{,}57$. Con

y : área $= |4 \cdot 3 - 1 \cdot 1| = 11$.

Solución del ejercicio 17

a. $M = (5, 3)$ y .

b. $(x-2)^2 + (y-1)^2 = (x-8)^2 + (y-5)^2$ da $-4x - 2y + 5 = -16x - 10y + 89$, es decir $12x + 8y - 84 = 0$ o $3x + 2y - 21 = 0$.

c. M: $15 + 6 - 21 = 0$. $(7, 0)$: $21 + 0 - 21 = 0$. Los dos están en la mediatriz (que es perpendicular a AB: el vector $(3, 2)$ es proporcional a $(6, 4)$).

d. Desde $(7, 0)$: $d = \sqrt{25 + 1} = \sqrt{26} \approx 5{,}10$ m a las dos oficinas. Desde M: $d = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13} \approx 3{,}61$ m.

Solución del ejercicio 18

a. $y = -\dfrac{2}{3}x + 2$: pendiente $-\dfrac{2}{3}$. Despejamos y en la ecuación general.

b. Misma pendiente: $2x + 3y + C = 0$ con $2 + 3 + C = 0$, $C = -5$: $2x + 3y - 5 = 0$. Las rectas paralelas tienen los mismos coeficientes A y B; hallamos C con el punto P.

c. Pendiente $\dfrac{3}{2}$ (inversa y opuesta): $3x - 2y + C = 0$ con $3 - 2 + C = 0$, $C = -1$: $3x - 2y - 1 = 0$. El producto de las pendientes es -1.

d. $d = \dfrac{|-6 - (-5)|}{\sqrt{13}} = \dfrac{1}{\sqrt{13}} \approx 0{,}28$. Usamos un punto de una recta y la distancia a la otra.

Solución del ejercicio 19

a. $AB = 6$; $AC = \sqrt{9 + 16} = 5$; $BC = \sqrt{9 + 16} = 5$. Dos lados iguales: isósceles.

b. $P = 6 + 5 + 5 = 16$.

c. AB es la recta $y = 1$; $d(C, AB) = 4$. Área $= \dfrac{6 \cdot 4}{2} = 12$.

d. AC: pendiente $\dfrac{4}{3}$, $4x - 3y - 1 = 0$. $d(B, AC) = \dfrac{|28 - 3 - 1|}{5} = \dfrac{24}{5} = 4{,}8$. Área $= \dfrac{5 \cdot 4{,}8}{2} = 12$. Coincide.

e. Sí: en un triángulo isósceles la altura sobre el lado desigual pasa por su punto medio $(4, 1)$, que tiene la misma abscisa que C.

Solución del ejercicio 20

a. Paralela: $\frac{k}{3} = \frac{2}{4}$, $k = \frac{3}{2}$. Perpendicular: $3k + 8 = 0$, $k = -\frac{8}{3}$.

b. Un punto de la primera es $\left(\frac{5}{3}, 0\right)$. Su distancia a la segunda es $\frac{|5 + 0 + 10|}{5} = 3$.

c. La perpendicular a $y = x$ por P es $x + y - 4 = 0$. Corte con $y = x$: $x = 2$, punto $(2, 2)$. Distancia: $\sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83$.

d. Lados: 4; $\sqrt{4 + 12} = 4$; $\sqrt{4 + 12} = 4$. Los tres lados miden 4: es equilátero.