Apuntes - Funciones lineales, cuadráticas y de proporcionalidad inversa

Curso: 4 Eso

En este tema aprenderás: funciones lineales y afines, funciones cuadráticas, proporcionalidad inversa y cómo reconocer cada tipo en una tabla. Cada idea va en un cuadro de color, con ejemplos resueltos paso a paso.

Actividad de introducción: tres tarifas distintas

En una ciudad hay tres ofertas para un servicio de alquiler de bicicletas. En la oferta A pagas 3 € por cada hora. En la oferta B pagas una cuota de 5 € y después 2 € por hora. En la oferta C se reparte un coste fijo de 12 € entre los x amigos que alquilan juntos. Si anotas el coste para varios valores, verás tres comportamientos muy diferentes: en A el coste crece siempre lo mismo, en B también pero parte de 5, y en C disminuye al aumentar el número de personas. Esos tres comportamientos son los de las funciones **lineales y afines**, las funciones **cuadráticas** (cuya gráfica es una parábola) y las de **proporcionalidad inversa** (hipérbola). En este tema aprenderás a reconocerlas, representarlas y usarlas.

Funciones lineales y afines

Definición: función afín

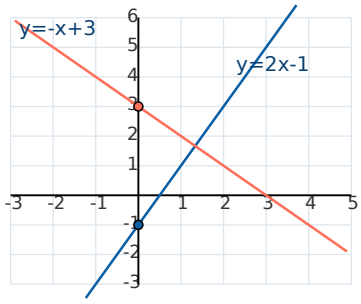
Una **función afín** tiene la forma $y = mx + n$. Su gráfica es una recta. El número m es la **pendiente**: indica cuánto cambia y cuando x aumenta una unidad. El número n es la **ordenada en el origen**: es el valor de y en $x = 0$, el punto $(0, n)$. Si $n = 0$, la recta pasa por el origen y es una función de **proporcionalidad directa** $y = mx$.

Propiedad: funciones lineales y afines

- Si $m > 0$, la función es creciente; si m, decreciente; si $m = 0$, constante.
- La pendiente entre dos puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ es $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.
- La ecuación de la recta por un punto (x_1, y_1) con pendiente m es $y - y_1 = m(x - x_1)$.
- Dos rectas son **paralelas** si tienen la misma pendiente y **perpendiculares** si $m \cdot m' = -1$.

Ejemplo 1

Recta por $(1, 2)$ y $(3, 8)$: $m = \frac{8-2}{3-1} = 3$. Entonces $y - 2 = 3(x - 1)$, es decir, $y = 3x - 1$.



Ejemplo 2: recta por dos puntos

Halla la función afín cuya gráfica pasa por $(2,1)$ y $(6,9)$.

La pendiente es $m=\frac{9-1}{6-2}=2$. Como $1=2\cdot 2+n$, $n=-3$. La función es $y=2x-3$; se comprueba con $(6,9)$: $2\cdot 6-3=9$.

Funciones cuadráticas

Definición: función cuadrática

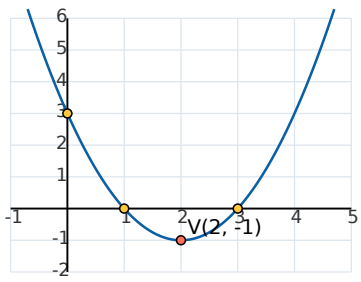
Una **función cuadrática** es $y=ax^2+bx+c$ con $a\neq 0$; su gráfica es una **parábola**. Si $a>0$ abre hacia arriba (tiene un mínimo) y si a hacia abajo (tiene un máximo). Para dibujarla se calculan:

- El **vértice**: $x_v=-\dfrac{b}{2a}$ y $y_v=f(x_v)$. El **eje de simetría** es la recta $x=x_v$.
- Los **cortes con el eje X**: soluciones de $ax^2+bx+c=0$ (pueden ser dos, una o ninguna).
- El **corte con el eje Y**: el punto $(0,c)$.
- Algunos puntos más, aprovechando la simetría.

Ejemplo 2

$y=x^2-4x+3$

$x_v=\frac{4}{2}=2$ y $y_v=4-8+3=-1$, vértice $(2,-1)$. Cortes con X: $x^2-4x+3=0\Rightarrow x=1,\ x=3$. Corte con Y: $(0,3)$. Mínimo en el vértice, recorrido $[-1,+\infty)$.



Observación

También se puede escribir en forma de vértice: $y = a(x-h)^2 + k$ tiene el vértice en (h, k). Por ejemplo, $y = 2(x-3)^2 - 5$ tiene el vértice en $(3, -5)$, abre hacia arriba y su eje es $x = 3$.

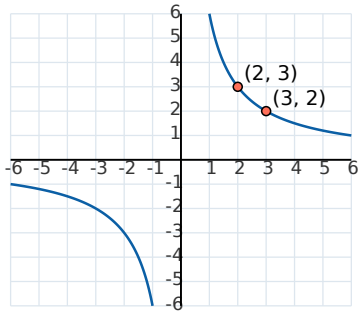
Cómo se hace: representar una parábola

1. Calcula el vértice: $x_v = -\frac{b}{2a}$ e $y_v = f(x_v)$.
2. Halla los cortes con el eje X (si existen) resolviendo $f(x) = 0$ y con el eje Y: $(0, c)$.
3. Añade algunos puntos simétricos respecto al eje de la parábola.
4. Une con una curva suave: hacia arriba si $a > 0$ y hacia abajo si a.

Proporcionalidad inversa

Propiedad

La función $y = \dfrac{k}{x}$ (con $k \neq 0$) relaciona dos magnitudes **inversamente proporcionales**: si una se multiplica por 2, la otra se divide entre 2, y el producto $x \cdot y = k$ es constante. Su gráfica es una **hipérbola**. Su dominio es $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ y tiene dos **asíntotas**: el eje Y ($x = 0$) y el eje X ($y = 0$), rectas a las que la curva se acerca sin tocarlas. Para $k > 0$ la hipérbola está en los cuadrantes primero y tercero; para k, en el segundo y cuarto.



Ejemplo 3

Seis obreros terminan una obra en 10 días. El producto $6 \cdot 10 = 60$ es constante, así que 8 obreros tardarán $\frac{60}{8} = 7{,}5$ días.

Cómo reconocer cada tipo en una tabla

Propiedad: cómo reconocer cada tipo en una tabla

- Si al aumentar x una unidad, y aumenta siempre lo mismo, es una función afín (por ejemplo, y: 5, 8, 11, 14).
- Si el producto $x \cdot y$ es constante, es de proporcionalidad inversa (por ejemplo, y: 12, 6, 4, 3).
- Si las diferencias entre valores consecutivos de y cambian de forma regular (1, 4, 9, 16: diferencias 3, 5, 7), es cuadrática.

¡Atención! Errores frecuentes

- Confundir la pendiente con la ordenada: en $y = 5x - 2$, $m = 5$ y $n = -2$.
- Olvidar que el vértice está en $x = -\frac{b}{2a}$ (con el signo cambiado).
- Pensar que la hipérbola corta a los ejes: no los toca nunca.
- Calcular mal la pendiente al restar en distinto orden numerador y denominador.

Transformar y combinar gráficas

Propiedad: traslaciones de la parábola

La parábola $y = a(x-h)^2 + k$ tiene el vértice en el punto (h, k) y su eje de simetría es la recta $x = h$. Si $a > 0$ se abre hacia arriba (mínimo) y si a hacia abajo (máximo). Cuanto mayor es $|a|$, más estrecha es. Pasar de la forma $ax^2 + bx + c$ a la forma $a(x-h)^2 + k$ se llama completar el cuadrado, con $h = -\dfrac{b}{2a}$ y $k = f(h)$.

Ejemplo 4

Escribe $y = x^2 - 6x + 5$ en la forma $y = (x-h)^2 + k$ e indica su vértice.

$h = \dfrac{6}{2} = 3$ y $k = f(3) = 9 - 18 + 5 = -4$. Entonces $y = (x-3)^2 - 4$ y el vértice es $(3, -4)$. Se comprueba desarrollando: $(x-3)^2 - 4 = x^2 - 6x + 9 - 4 = x^2 - 6x + 5$.

Método: puntos de corte entre dos gráficas

1. Iguala las dos expresiones de y.
2. Resuelve la ecuación que resulta (de primer o de segundo grado).
3. Calcula la y de cada solución sustituyendo en cualquiera de las dos funciones.
4. Interpreta: una solución doble indica tangencia y ninguna solución real indica que no se cortan.

Propiedad: la proporcionalidad inversa

Dos magnitudes son inversamente proporcionales si su producto es constante: $x \cdot y = k$. Su gráfica es una **hipérbola** con asíntotas en los ejes. Si $k > 0$ está en los

cuadrantes primero y tercero; si k, en el segundo y el cuarto. La función $y = \dfrac{k}{x-h} + m$ es la misma hipérbola trasladada, con asíntotas $x = h$ e $y = m$.

Ejemplo 5

Dibuja $y = \dfrac{4}{x-1} + 2$ indicando las asíntotas.

Asíntota vertical $x = 1$ y horizontal $y = 2$. Tabla: $x = -1$: 0; $x = 0$: -2; $x = 2$: 6; $x = 3$: 4; $x = 5$: 3. La gráfica tiene dos ramas: una a la derecha de $x = 1$, por encima de $y = 2$, y otra a la izquierda, por debajo.

¡Atención! Errores habituales

- El vértice de $y = ax^2 + bx + c$ está en $x = -\dfrac{b}{2a}$: no olvides el signo menos.
- Una función afín $y = mx + n$ solo es de proporcionalidad directa si $n = 0$.
- En una hipérbola no existe $f(0)$: el dominio excluye el cero.
- Una parábola no es una «V»: tiene un vértice redondeado y es simétrica respecto de su eje.
- Para reconocer una función en una tabla: diferencias constantes indican lineal; producto constante, proporcionalidad inversa; segundas diferencias constantes, cuadrática.

Funciones exponenciales y modelos reales

Definición: función exponencial

Una **función exponencial** es de la forma $y = C \cdot a^x$ con $a > 0$, $a \neq 1$. Si $a > 1$ crece cada vez más deprisa y si 0 decrece acercándose al eje X sin tocarlo. Pasa siempre por el punto $(0, C)$. Mientras que una función lineal suma la misma cantidad en cada paso, la exponencial multiplica por el mismo factor a.

Ejemplo 6

Una población de 200 bacterias se triplica cada hora. Escribe la función y calcula cuántas hay a las 4 horas.

$y = 200 \cdot 3^x$. Para $x = 4$: $200 \cdot 81 = 16\,200$ bacterias. Cada hora el número se multiplica por 3: $200,\ 600,\ 1800,\ 5400,\ 16\,200$.

Método: elegir el modelo adecuado

1. Mira cómo cambia y cuando x aumenta una unidad.
2. Si y aumenta siempre la misma cantidad, el modelo es lineal.

3. Si y se multiplica siempre por el mismo número, es exponencial.
4. Si el producto $x \cdot y$ es constante, es de proporcionalidad inversa.
5. Si el cambio de y crece de forma regular (segundas diferencias constantes), es cuadrático.
6. Escribe la fórmula, comprueba con dos datos de la tabla y úsala para predecir.

Ejemplo 7

Decide el modelo de la tabla x: $0, 1, 2, 3$ e y: $5, 10, 20, 40$ y predice y para $x = 6$.

Cada valor es el doble del anterior: modelo exponencial $y = 5 \cdot 2^x$. Para $x = 6$: $y = 5 \cdot 64 = 320$.

Resumen: cómo estudiar una función elemental

Ante cualquier función de este tema, sigue siempre el mismo guion: identifica el tipo a partir de la fórmula o de la tabla, calcula los puntos importantes (cortes con los ejes y, en la parábola, el vértice), construye una tabla de valores con números sencillos, dibuja la gráfica y, por último, interpreta el resultado en el contexto del problema con sus unidades. Comprobar un punto de la gráfica en la fórmula evita la mayoría de los errores de cálculo y de signo.

¿Sabías que?

Galileo descubrió que un proyectil lanzado en el aire sigue una trayectoria parabólica, y por eso las parábolas aparecen en los chorros de las fuentes, en los puentes colgantes y en las antenas parabólicas, que concentran las señales en un único punto, el foco. Las hipérbolas, en cambio, aparecen cada vez que dos magnitudes se reparten un total fijo, como el tiempo y la velocidad en un viaje.

Observación: el dominio en los problemas

Cuando una función describe una situación real, su dominio no es todo $\mathbb{R}$. Un tiempo no puede ser negativo, una longitud tiene que ser positiva y un número de personas debe ser natural. Por eso, antes de dar una respuesta, conviene preguntarse qué valores de x tienen sentido y descartar las soluciones que queden fuera, aunque sean correctas desde el punto de vista algebraico.

El consejo de Otto

Para dibujar una recta basta con dos puntos; para una parábola, el vértice y dos puntos simétricos; para una hipérbola, ¡cuatro puntos y las asíntotas!