Soluciones - Funciones lineales, cuadráticas y de proporcionalidad inversa

Curso: 4 Eso

Solución del ejercicio 1

a. $y = -2x + 5$. La ordenada en el origen es el término independiente.
b. $m = \frac{9-3}{4-1} = 2$. Con $(1, 3)$: $3 = 2 + n$, $n = 1$. $y = 2x + 1$. La pendiente es el cociente entre la variación de y y la de x. Comprobación con $(4, 9)$: $8 + 1 = 9$.
c. $m = \frac{-3-1}{2-(-2)} = -1$. Con $(2, -3)$: $-3 = -2 + n$, $n = -1$. $y = -x - 1$. Comprobación con $(-2, 1)$: $2 - 1 = 1$.
d. Misma pendiente 3: $4 = 6 + n$, $n = -2$. $y = 3x - 2$. Dos rectas paralelas tienen la misma pendiente. Comprobación: $6 - 2 = 4$.

Solución del ejercicio 2

a. Verdadera: $4x - 8 = 0$ da $x = 2$. Un punto del eje X tiene ordenada cero.
b. Verdadera: tienen la misma pendiente 2 y distinta ordenada. Dos rectas con la misma pendiente nunca se cortan.
c. Verdadera: $x + 3 = -x + 7$ da $x = 2$ e $y = 5$. Comprobación: $2 + 3 = 5$ y $-2 + 7 = 5$.
d. Verdadera: $2y = -3x + 6$, $y = -\frac{3}{2}x + 3$. Despejamos y para leer la pendiente y la ordenada en el origen.

Solución del ejercicio 3

a. Vértice en $x = \frac{4}{2} = 2$: $y = 4 - 8 + 3 = -1$, vértice $(2, -1)$ (mínimo). Eje $x = 2$. Cortes: $(0, 3)$ y $x^2 - 4x + 3 = 0$ da $(1, 0)$ y $(3, 0)$.
b. $x = \frac{-2}{-2} = 1$: $y = -1 + 2 + 3 = 4$, vértice $(1, 4)$ (máximo). Eje $x = 1$. Cortes: $(0, 3)$; $x^2 - 2x - 3 = 0$ da $(-1, 0)$ y $(3, 0)$.
c. $x = 0$: vértice $(0, -8)$. Eje $x = 0$. Cortes: $(0, -8)$ y $x^2 = 4$ da $(-2, 0)$ y $(2, 0)$.
d. $x = -1$: $y = 1 - 2 + 2 = 1$, vértice $(-1, 1)$. Eje $x = -1$. $\Delta = 4 - 8$: no corta al eje X; corte con Y en $(0, 2)$.

Solución del ejercicio 4

a. Vértice en $x = \frac{2}{2} = 1$, $y = 1 - 2 - 3 = -4$: $(1, -4)$. Eje $x = 1$. Usamos $x_v = -\frac{b}{2a}$ y sustituimos para hallar y_v.
b. $x = -2$: 5; $x = -1$: 0; $x = 0$: -3; $x = 1$: -4; $x = 2$: -3; $x = 3$: 0; $x = 4$: 5. Los valores son simétricos respecto de $x = 1$.
c. Eje Y: $(0, -3)$. Eje X: $x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1) = 0$: $(-1, 0)$ y $(3, 0)$.
d. Recorrido $[-4, +\infty)$. Decrece en $(-\infty, 1)$ y crece en $(1, +\infty)$. Como $a = 1 > 0$, las ramas van hacia arriba y el vértice es un mínimo.

Solución del ejercicio 5

a. $y = 12,\ 6,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1$. Dividimos 12 entre cada valor de x.
b. Se reduce a la mitad: $12/(2x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{x}$. Es la característica de la proporcionalidad inversa.
c. $\frac{12}{x} = 2{,}5$, $x = \frac{12}{2{,}5} = 4{,}8$. Despejamos x multiplicando en cruz.
d. Asíntotas: $x = 0$ (vertical) e $y = 0$ (horizontal). Dominio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. La función no está definida en $x = 0$.

Solución del ejercicio 6

a. Las diferencias son constantes $(+3)$: lineal, $y = 3x + 2$. Comprobación: $3 \cdot 1 + 2 = 5$.
b. El producto $xy = 12$ es constante: proporcionalidad inversa, $y = \frac{12}{x}$.
c. Las diferencias son $1, 3, 5$ (segundas diferencias constantes 2): cuadrática, $y = x^2 + 1$. Comprobación: $2^2 + 1 = 5$.
d. El producto $xy = 16$ es constante: proporcionalidad inversa, $y = \frac{16}{x}$.

Solución del ejercicio 7

a. $x^2 - x - 2 = 0$, $(x - 2)(x + 1) = 0$: $x = 2$ o $x = -1$. Igualamos las dos expresiones de y y pasamos todo a un miembro.
b. Puntos $(2, 4)$ y $(-1, 1)$. Sustituimos cada x en $y = x^2$.
c. $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 = 0$: una sola solución $x = 1$; punto $(1, 1)$. La recta es tangente a la parábola.
d. $x^2 - 2x + 5 = 0$, $\Delta = 4 - 20$: ninguno; la recta no corta a la parábola. El discriminante negativo indica que no hay puntos comunes.

Solución del ejercicio 8

a. $C(x) = 8 + 1{,}25x$.
b. $C(0) = 8$; $C(10) = 20{,}50$; $C(25) = 39{,}25$ €. Sustituimos cada valor en la función.
c. $8 + 1{,}25x = 46$, $x = 30{,}4\ m^3$. Restamos 8 y dividimos entre 1,25.
d. La pendiente $1{,}25$ es el precio por m^3; la ordenada 8 es la cuota fija. No es de proporcionalidad directa porque no pasa por el origen.

Solución del ejercicio 9

a. $I(x) = 30 + 12x$ y $P(x) = 20x$.
b. Semana 0: 30 y 0; 2: 54 y 40; 4: 78 y 80; 6: 102 y 120; 8: 126 y 160.
c. $30 + 12x = 20x$, $8x = 30$, $x = 3{,}75$ semanas, con 75 €. En semanas completas, Pablo supera a Irene a partir de la semana 4.
d. Semana 12: Irene 174 € y Pablo 240 €. Pablo tiene 66 € más.

Solución del ejercicio 10

a. $y(0) = 20$ m y $y(10) = 20 - 5 = 15$ m. Sustituimos $x = 0$ y $x = 10$.
b. $20 - 0{,}05x^2 = 0$, $x^2 = 400$, $x = \pm 20$: anchura 40 m. La anchura es la distancia entre los dos puntos de corte.
c. $10 = 20 - 0{,}05x^2$, $x^2 = 200$, $x = \pm\sqrt{200} \approx \pm 14{,}14$: anchura $\approx 28{,}3$ m.
d. $12 = 20 - 0{,}05x^2$, $x^2 = 160$, $x \approx \pm 12{,}65$: anchura libre $\approx 25{,}3$ m.

Solución del ejercicio 11

a. $A(x) = 30x - 2x^2$ con 0. El área es el producto de los dos lados.
b. Vértice en $x = \dfrac{-30}{-4} = 7{,}5$ m, $A = 7{,}5 \cdot 15 = 112{,}5$ m^2: es el área máxima. Como a , el vértice es un máximo.
c. $A(3) = 72$; $A(5) = 100$; $A(7{,}5) = 112{,}5$; $A(10) = 100$; $A(12) = 72$ m^2. Los valores son simétricos respecto de $x = 7{,}5$.
d. Lados perpendiculares $7{,}5$ m y lado paralelo 15 m: huerto de $7{,}5 \times 15$. Respuesta: 7,5 m por 15 m, con 112,5 m^2.

Solución del ejercicio 12

a. $P(x) = \dfrac{600}{x}$.
b. $60;\ 50;\ 40;\ 30;\ 24;\ 20$ €. Dividimos 600 entre cada número de personas.

c. $\frac{600}{x} \leq 22$ da $x \geq 27{,}3$: hacen falta al menos 28 personas. Como las personas son enteras, redondeamos hacia arriba.
d. Cuantas más personas, menos paga cada una, pero el coste total no cambia. Con 24: $\frac{600}{24} = 25$ €.

Solución del ejercicio 13

a. $v = 60$: 4 h; $v = 80$: 3 h; $v = 100$: $2{,}4$ h; $v = 120$: 2 h. Dividimos 240 entre cada velocidad.
b. Sí: $v \cdot t = 240$ es constante.
c. Con 120 km/h: 2 h. A mayor velocidad, menor tiempo.
d. $\frac{240}{v}$ da $v > 96$ km/h. Despejamos v multiplicando por v y dividiendo entre 2,5.

Solución del ejercicio 14

a. $h(0) = 1$ m. Vértice en $t = \frac{-20}{-10} = 2$ s, $h(2) = -20 + 40 + 1 = 21$ m.
b. Alcanza el máximo a los 2 s: 21 m.
c. $-5t^2 + 20t + 1 = 0$, $t = \frac{-20 \pm \sqrt{400 + 20}}{-10}$; la raíz positiva es $t \approx 4{,}05$ s.
Respuesta: vuelve al suelo a los 4,05 s aproximadamente.
d. $-5t^2 + 20t + 1 > 16$ da $t^2 - 4t + 3$, $(t - 1)(t - 3)$: entre 1 y 3 s. Respuesta: está a más de 16 m entre el primer y el tercer segundo.

Solución del ejercicio 15

a. $y(0) = 0{,}5$ m. Vértice en $x = \frac{-2}{-1} = 2$ m, $y(2) = -2 + 4 + 0{,}5 = 2{,}5$ m.
b. A 2 m del punto de salida.
c. $-0{,}5x^2 + 2x + 0{,}5 = 0$, $x^2 - 4x - 1 = 0$, $x = 2 + \sqrt{5} \approx 4{,}24$ m.
d. $y(0) = 0{,}5$; $y(1) = 2$; $y(2) = 2{,}5$; $y(3) = 2$; $y(4) = 0{,}5$. A 3 m el chorro está a 2 m de altura, que es menos que $2{,}5$ m: el chorro no pasa por encima del bordillo, choca con él.

Solución del ejercicio 16

a. $I(p) = 100p - 4p^2$ con $0 \leq p \leq 25$. El precio no puede hacer negativas las ventas: $100 - 4p \geq 0$.

b. $I(5) = 100 \cdot 5 - 100 = 400$; $I(10) = 1000 - 400 = 600$; $I(20) = 2000 - 1600 = 400$ €.
c. Vértice en $p = \dfrac{100}{8} = 12{,}5$ €: $I = 12{,}5 \cdot 50 = 625$ €. Como $a = -4$, el vértice es un máximo.
d. $100p - 4p^2 \geq 400$ da $p^2 - 25p + 100 \leq 0$, $(p-5)(p-20) \leq 0$: entre 5 € y 20 €.
e. $B(p) = -4p^2 + 112p - 300$, vértice en $p = \dfrac{112}{8} = 14$ €, con $B(14) = 11 \cdot 44 = 484$ €. Respuesta: el beneficio máximo, 484 €, se obtiene con un precio de 14 €.

Solución del ejercicio 17

a. El trabajo total es $12 \cdot 30 = 360$ obreros-día, luego $d(n) = \dfrac{360}{n}$.
b. $60;\ 36;\ 30;\ 24;\ 18;\ 12$ días. Dividimos 360 entre cada número de obreros.
c. $\dfrac{360}{n} = 18$ da $n = 20$ obreros.
d. Con 10 obreros: $\dfrac{360}{10} = 36$ días, es decir 6 días más.
e. $\dfrac{360}{n} = 20$ da $n = 18$ obreros: hacen falta 6 más. Respuesta: 6 obreros más.

Solución del ejercicio 18

a. $E(x) = 2^x$ y $L(x) = x + 1$.
b. E: $1, 2, 4, 8, 16, 32$. L: $1, 2, 3, 4, 5, 6$.
c. Coinciden en $x = 0$ y $x = 1$; desde $x = 2$ ($4 > 3$) la exponencial es mayor y la diferencia crece.
d. $2^{10} = 1024 > 1000$ y $2^9 = 512$: en 10 horas.
e. Porque en la lineal se suma siempre lo mismo y en la exponencial se multiplica: cada hora el incremento de E duplica al de la hora anterior.

Solución del ejercicio 19

a. $-0{,}4x(x-6) = 0$: $x = 0$ y $x = 6$. El salto mide 6 m. Sacamos factor común e igualamos cada factor a cero.
b. Vértice en $x = \dfrac{-2{,}4}{-0{,}8} = 3$ m, $y(3) = -3{,}6 + 7{,}2 = 3{,}6$ m.
c. $y(1) = 2$ m e $y(4) = -6{,}4 + 9{,}6 = 3{,}2$ m.
d. $-0{,}4x^2 + 2{,}4x > 2$ da $x^2 - 6x + 5$, $(x-1)(x-5)$: entre 1 y 5 m.
e. $y(2) = -1{,}6 + 4{,}8 = 3{,}2$ m, que es más de 2 m: el delfín pasa por encima del aro. Respuesta: pasa por encima del aro.

Solución del ejercicio 20

a. $c = 3$; $a + b + 3 = 0$ y $9a + 3b + 3 = 0$. De la primera $b = -a - 3$; en la segunda $9a - 3a - 9 + 3 = 0$, $a = 1$ y $b = -4$. La parábola es $y = x^2 - 4x + 3$. Comprobación: $9 - 12 + 3 = 0$.

b. $x(x - 1) = 6$, $x^2 - x - 6 = 0$, $(x - 3)(x + 2) = 0$. Puntos $(3, 2)$ y $(-2, -3)$. Sustituimos $y = x - 1$ en $xy = 6$.

c. $x^2 = 2x + k$, $x^2 - 2x - k = 0$ tiene solución doble si $\Delta = 4 + 4k = 0$: $k = -1$ (la tangente es $y = 2x - 1$). Una recta tangente toca la parábola en un solo punto.

d. $k = 3 \cdot 4 = 12$. Para $x = -6$: $y = \dfrac{12}{-6} = -2$. Multiplicamos las coordenadas para obtener k.