Apuntes - Funciones y sus características

Curso: 4 Eso

En este tema aprenderás: qué es una función, dominio y recorrido, leer una gráfica, continuidad, simetría y funciones pares e impares y funciones y problemas reales. Cada idea va en un cuadro de color, con ejemplos resueltos paso a paso.

Actividad de introducción: el aparcamiento

En un aparcamiento de una ciudad de Castilla-La Mancha, el precio depende del tiempo: una hora cuesta 2 €, dos horas 3 €, tres horas 4 €... y el máximo diario es 10 €. Cada tiempo tiene **un único precio**: eso es una función. ¿Se puede aparcar -1 horas? ¿Hay un precio de $2{,}5$ € alguna vez? ¿Qué pasa con el precio cuando pasas de 1 h a 1 h 1 min? Responder a estas preguntas es estudiar el **dominio** (los tiempos posibles), el **recorrido** (los precios que se pueden pagar), la **continuidad** (los saltos de precio) y el **crecimiento** (si el precio sube o baja). En este tema aprenderás a leer y a describir con precisión las gráficas y fórmulas de las funciones, y a aplicar estas ideas a situaciones de la vida diaria.

Qué es una función

Propiedad

Una **función** f asigna a cada número x de un conjunto (la **variable independiente**) *un único* número $y = f(x)$ (la **variable dependiente**). Se puede dar con una fórmula, una tabla, una gráfica o un enunciado. Una curva en el plano es la gráfica de una función si **cada recta vertical la corta como mucho en un punto**: la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ no lo es, porque para $x = 0$ da $y = 2$ e $y = -2$.

Ejemplo 1

Si $f(x) = x^2 - 3x$, entonces $f(-1) = 1 + 3 = 4$ y $f(4) = 16 - 12 = 4$.

Dominio y recorrido

Definición: dominio

El **dominio**, $\mathrm{Dom}\, f$, es el conjunto de valores de x para los que existe $f(x)$. El **recorrido** (o imagen), $\mathrm{Rec}\, f$, es el conjunto de valores que toma y. Reglas para calcular el dominio de una fórmula:

- En una fracción $\frac{1}{g(x)}$, se excluyen los x que anulan g: $f(x) = \frac{3}{x-2}$ tiene dominio $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.
- En una raíz cuadrada $\sqrt{g(x)}$, se exige $g(x) \geq 0$: $\sqrt{x+5}$ tiene dominio $[-5, +\infty)$.

- Si no hay fracciones ni raíces (polinomios), el dominio es $\mathbb{R}$.

En los problemas reales el dominio se restringe al sentido del contexto: un tiempo no puede ser negativo.

Cómo se hace: calcular el dominio de una función dada por una fórmula

1. Mira si hay fracciones: iguala el denominador a cero y excluye esos valores.
2. Mira si hay raíces de índice par: exige que el radicando sea ≥ 0.
3. Combina todas las condiciones (intersección) y escribe el dominio con intervalos.

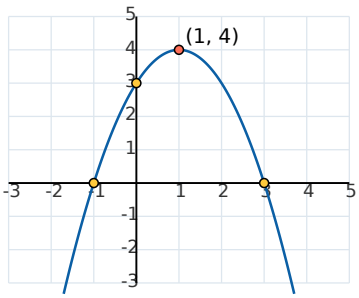
Ejemplo 2: dominio con raíz y fracción

Halla el dominio de $f(x) = \frac{\sqrt{2x-6}}{x-5}$.

La raíz exige $2x - 6 \geq 0$, es decir, $x \geq 3$. El denominador exige $x \neq 5$. Por tanto $\text{Dom}\, f = [3, 5) \cup (5, +\infty)$.

Leer una gráfica

Observa la función $f(x) = -x^2 + 2x + 3$:



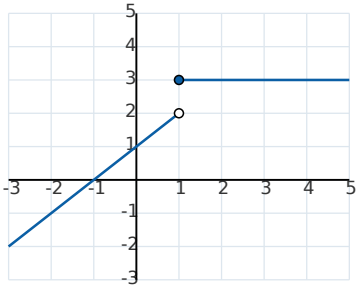
Propiedad: leer una gráfica

- **Puntos de corte con el eje X** (raíces): $f(x) = 0$, en $x = -1$ y $x = 3$. **Con el eje Y**: $f(0) = 3$.
- **Crecimiento:** f es *creciente* en un intervalo si, al aumentar x, aumenta $f(x)$; *decreciente* si disminuye. Aquí es creciente en $(-\infty, 1)$ y decreciente en $(1, +\infty)$.
- **Extremos:** un *máximo* relativo es un punto más alto que los cercanos. Aquí el máximo está en $(1, 4)$, y es también **absoluto**.
- **Recorrido:** $(-\infty, 4]$.
- **Dominio:** $\mathbb{R}$.

Continuidad

Definición: continua

Una función es **continua** si su gráfica se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel. Los puntos donde esto no ocurre son **discontinuidades**: puede haber un *salto*, un *punto aislado* o una *asíntota* (donde la función se va a infinito). Una función definida a trozos como *f(x)=\begin{cases}x+1&\text{si }*x tiene un salto en $x = 1$: por la izquierda se acerca a 2 (punto vacío) y en $x = 1$ vale 3 (punto lleno).



Simetría y funciones pares e impares

Definición: par

Una función es **par** si $f(-x) = f(x)$ para todo x (simétrica respecto al eje Y), como $f(x) = x^2$. Es **impar** si $f(-x) = -f(x)$ (simétrica respecto al origen), como $f(x) = x^3$. Muchas no son ni pares ni impares: $f(x) = x^2 + x$, porque $f(-1) = 0$ mientras que $f(1) = 2$ y $-f(1) = -2$.

Ejemplo 3: par o impar

Estudia la simetría de $f(x) = x^3 - x$.

$f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -f(x)$. Es una función impar: su gráfica es simétrica respecto al origen.

Funciones y problemas reales

Observación

Muchas situaciones se modelan con funciones. Si una pelota se lanza hacia arriba con $h(t) = -5t^2 + 20t$ (metros, segundos), su altura máxima se alcanza en el vértice $t = -\frac{b}{2a} = 2$ s, con $h(2) = 20$ m. Vuelve al suelo cuando $h(t) = 0$: $t = 0$ o $t = 4$. Por tanto el dominio real es $[0, 4]$ y el recorrido $[0, 20]$.

¡Atención! Errores frecuentes

- Confundir dominio (valores de x) con recorrido (valores de y).
- Decir que una función crece o decrece en un «punto»: se habla de intervalos.

- Olvidar que el denominador no puede ser 0 y que el radicando no puede ser negativo.
- Dar el máximo como un número cuando se pide el punto: el máximo es $(1, 4)$, con $x = 1$ y valor 4.

Extremos, tabla de variación y funciones a trozos

Definición: máximos y mínimos

Una función tiene un **máximo relativo** en $x = a$ si $f(a) \geq f(x)$ para los valores de x próximos a a; tiene un **mínimo relativo** si $f(a) \leq f(x)$ cerca de a. El **máximo absoluto** (o mínimo absoluto) es el mayor (o menor) de todos los valores que toma la función. Los máximos y mínimos se llaman **extremos**.

Método: describir una función a partir de su gráfica

1. Dominio: proyecta la gráfica sobre el eje X.
2. Recorrido: proyecta la gráfica sobre el eje Y.
3. Cortes con los ejes: puntos donde la gráfica toca el eje Y ($x = 0$) y el eje X ($y = 0$).
4. Crecimiento y decrecimiento: recorre la gráfica de izquierda a derecha e indica los intervalos de x en que sube o baja.
5. Extremos: busca los puntos más altos y más bajos.
6. Continuidad, simetría y periodicidad: señala saltos, comprueba si es par o impar y si se repite.

Ejemplo 2

Una función definida a trozos es $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 3 - x & \text{si } x > 1 \end{cases}$. Calcula $f(-2)$, $f(1)$, $f(2)$ y estudia la continuidad en $x = 1$.

Para $x = -2$ se usa el primer trozo: $f(-2) = 4$. Para $x = 1$: $f(1) = 1^2 = 1$. Para $x = 2$ se usa el segundo trozo: $f(2) = 3 - 2 = 1$. Por la izquierda de 1 el valor se acerca a 1 y por la derecha se acerca a $3 - 1 = 2$. No coinciden: hay un salto de 1 unidad, la función no es continua en $x = 1$.

¡Atención! Errores al estudiar funciones

- El dominio se refiere a los valores de x y el recorrido a los de y: no los confundas.
- En un contexto real el dominio puede ser más pequeño que el de la fórmula: el tiempo no es negativo y un depósito no puede tener más litros que su capacidad.
- Una función puede crecer en un intervalo y decrecer en otro: se describe por

intervalos y se indican los extremos.
- Una gráfica es función si cada recta vertical la corta, como mucho, en un punto: una circunferencia no es la gráfica de una función.
- Para el dominio de una raíz hay que exigir radicando ≥ 0; para una fracción, denominador $\neq 0$.

Periodicidad y funciones reales

Propiedad: función periódica

Una función es **periódica** de periodo T si su gráfica se repite cada T unidades: $f(x+T)=f(x)$ para todo x. Los fenómenos que se repiten, como las mareas, el calendario o las estaciones, se modelan con funciones periódicas. Para calcular el valor de f en un punto lejano se resta o suma el periodo las veces necesarias hasta caer en el primer intervalo conocido.

Ejemplo 3

Una función de periodo 6 cumple $f(x)=x^2$ en $[0,6)$. Calcula $f(8)$ y $f(-2)$.

$f(8)=f(8-6)=f(2)=4$. $f(-2)=f(-2+6)=f(4)=16$.

¿Sabías que?

La palabra «función» la introdujo el matemático alemán Gottfried Leibniz a finales del siglo XVII. Más tarde, Leonhard Euler escribió por primera vez $f(x)$ para indicar el valor de la función f en el punto x, una notación que seguimos usando hoy. La idea de que una cantidad depende de otra sirve lo mismo para el precio del pan que para predecir las mareas o el clima.

Tasa de variación media

Definición: tasa de variación media

La tasa de variación media de una función f en el intervalo $[a,b]$ mide cuánto cambia, en promedio, la variable y por cada unidad que aumenta x: $TVM[a,b]=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Si es positiva, la función ha subido en ese intervalo; si es negativa, ha bajado; y si es cero, empieza y termina a la misma altura. Gráficamente es la pendiente del segmento que une los puntos $(a,f(a))$ y $(b,f(b))$.

Ejemplo 4

La altura de una pelota es $h(t)=20t-5t^2$. Calcula la tasa de variación media en $[0,1]$ y en $[1,3]$.

En el primer intervalo: $h(0) = 0$ y $h(1) = 15$, así que $TVM[0,1] = \frac{15-0}{1-0} = 15$ m/s. La pelota sube, en promedio, 15 metros por segundo. En el segundo: $h(1) = 15$ y $h(3) = 15$, así que $TVM[1,3] = \frac{15-15}{3-1} = 0$. Aunque la pelota se ha movido mucho, empieza y termina a la misma altura: la tasa media es cero. Esto muestra que la tasa media resume el cambio global, pero no lo que ocurre dentro del intervalo.

El consejo de Otto

Para leer una gráfica, recorre el eje X de izquierda a derecha: lo que sube es creciente y lo que baja, decreciente. Los extremos están donde cambia el sentido.