Ejercicios - Funciones y sus características

Curso: 4 Eso · 20

Se debe mostrar el desarrollo de cada ejercicio.

Ejercicio 1

Ejercicio 1 – ¿Es una función?

Decide en cada caso si la relación define una función de x en y y razona la respuesta.

a. Pares $(1,3), (2,5), (3,7), (4,9)$.
b. Pares $(1,2), (1,4), (2,6), (3,8)$.
c. La relación «a cada persona se le asigna su fecha de nacimiento».
d. La relación «a cada fecha de nacimiento se le asigna la persona que nació ese día» en una clase con dos alumnos que cumplen el mismo día.

Ejercicio 2

Ejercicio 2 – Valores de una función

Sea $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

a. Calcula $f(-1)$, $f(0)$ y $f(2)$.
b. Resuelve $f(x) = 0$.
c. Resuelve $f(x) = 6$.
d. ¿Pertenece el punto $(4,6)$ a la gráfica? ¿Y el punto $(3,1)$?

Ejercicio 3

Ejercicio 3 – Dominio de una función

Calcula el dominio de cada función.

a. $f(x) = \sqrt{x-3}$
b. $g(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$
c. $h(x) = \sqrt{9-x^2}$
d. $k(x) = \dfrac{x+1}{x^2+x-6}$

Ejercicio 4

Ejercicio 4 – Recorrido de una función

Determina el recorrido de cada función.

a. $f(x) = x^2 + 1$
b. $g(x) = -x^2 + 4$
c. $h(x) = 2x - 5$
d. $k(x) = \sqrt{x} + 2$

Ejercicio 5

Ejercicio 5 – Puntos de corte con los ejes

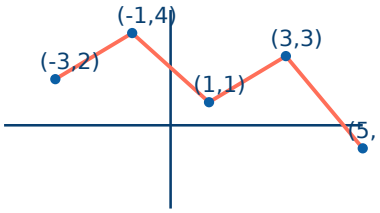
Halla los puntos de corte con los ejes de cada gráfica.

a. $f(x) = x^2 - 5x + 6$
b. $g(x) = 2x - 6$
c. $h(x) = x^3 - x$
d. $k(x) = \dfrac{x+4}{x-2}$

Ejercicio 6

Ejercicio 6 – Leer una gráfica

La gráfica de una función f pasa por los puntos $(-3, 2)$, $(-1, 4)$, $(1, 1)$, $(3, 3)$ y $(5, -1)$ y está formada por segmentos que los unen.



a. Indica el dominio y el recorrido.
b. Indica los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
c. Señala los máximos y mínimos relativos.
d. Calcula $f(0)$ sabiendo que el primer tramo es el segmento que une $(-1, 4)$ con $(1, 1)$.

Ejercicio 7

Ejercicio 7 – Continuidad en una función a trozos

Estudia la continuidad en el punto de cambio de cada función.

a. $f(x)=\begin{cases}x+1&\text{si }x<1\\x^2&\text{si }x\geq 1\end{cases}$
b. $g(x)=\begin{cases}x^2&\text{si }x<1\\x+1&\text{si }x\geq 1\end{cases}$
c. $h(x) = \dfrac{1}{x-1}$ en $x = 1$
d. Dibuja con una tabla de valores la gráfica de f para $x = -1, 0, 1, 2, 3, 4$.

Ejercicio 8

Ejercicio 8 – Simetrías

Estudia si cada función es par, impar o ninguna de las dos.

a. $f(x) = x^4 - 2x^2$
b. $g(x) = x^3 - x$
c. $h(x) = x^2 + x$
d. $k(x) = |x|$ y $m(x) = \dfrac{1}{x}$

Ejercicio 9

Ejercicio 9 – La tarifa del aparcamiento

Un aparcamiento de Santander cobra $2{,}50$ € la primera hora o fracción, $1{,}20$ € por cada hora adicional o fracción y un máximo de 12 € al día.

Horas	0,5	1	1,5	2	4	8	12
Precio (€)	?	?	?	?	?	?	?

a. Completa la tabla del precio para $0{,}5$ h; 1 h; $1{,}5$ h; 2 h; 4 h; 8 h; 12 h.
b. Indica el dominio de la función en este contexto y su recorrido.
c. ¿Es continua la función? ¿Dónde presenta saltos?
d. ¿Cuánto paga alguien que deja el coche 3 h 10 min?

Ejercicio 10

Ejercicio 10 – La temperatura a lo largo del día

El termómetro de una estación meteorológica de Ávila registra estas temperaturas durante un día de otoño.

Hora	0	3	6	9	12	15	18	21	24
T (°C)	8	6	4	10	15	17	12	7	8

a. Indica la variable independiente, la dependiente y el dominio.
b. ¿En qué intervalos crece y decrece la temperatura?
c. Indica el máximo y el mínimo absolutos con la hora a la que se alcanzan.
d. ¿Cuál es el recorrido? ¿A qué horas la temperatura es de 10 °C?

Ejercicio 11

Ejercicio 11 – El depósito que se llena

Un depósito de 500 L se llena con un grifo que aporta 20 L por minuto.

a. Escribe la función $V(t)$ del volumen en función del tiempo.

b. ¿Cuál es el dominio en este contexto? ¿Y el recorrido?
c. ¿Cuánto tarda en llenarse? ¿Cuánto hay a los 12 minutos?
d. Si el depósito ya tenía 60 L, escribe la nueva función y su dominio.

Ejercicio 12

Ejercicio 12 – La bajada de bandera

Una tarifa de taxi de Granada cobra 3 € de bajada de bandera más $1{,}10$ € por kilómetro.

a. Escribe la función $P(x)$ del precio en función de los kilómetros.
b. Calcula $P(0)$, $P(5)$ y $P(12)$.
c. ¿Cuántos kilómetros se pueden recorrer con 25 €?
d. Indica dominio y recorrido de la función en la realidad si el trayecto máximo es de 50 km.

Ejercicio 13

Ejercicio 13 – El tren de alta velocidad

La velocidad de un tren que sale de una estación de Zaragoza varía así: durante los primeros 10 min acelera de forma uniforme de 0 a 120 km/h, durante los siguientes 30 min va a velocidad constante y en los últimos 10 min frena de forma uniforme hasta parar.

a. Escribe la función $v(t)$ por tramos.
b. Calcula $v(5)$, $v(20)$ y $v(45)$.
c. Indica los intervalos de crecimiento, constancia y decrecimiento.
d. Calcula la distancia recorrida en el tramo constante.

Ejercicio 14

Ejercicio 14 – Los beneficios del cine

El beneficio mensual, en cientos de euros, de un cine de pueblo de Cuenca depende del número x de sesiones: $B(x) = -x^2 + 20x - 36$, con $0 \le x \le 20$.

a. Calcula $B(0)$, $B(2)$ y $B(10)$.
b. Halla las sesiones para las que $B(x) = 0$ (puntos de corte con el eje X).
c. Calcula el vértice de la parábola e interprétalo.
d. Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento y el recorrido en el dominio dado.

Ejercicio 15

Ejercicio 15 – El lanzamiento vertical

Se lanza verticalmente una pelota desde el suelo y su altura en metros a los t segundos es $h(t) = 20t - 5t^2$. La tabla recoge algunos valores.

t (s)	0	1	2	3	4
h (m)	?	?	?	?	?

a. Completa la tabla para $t = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$.
b. ¿Cuál es el dominio en este contexto? Razona.
c. Indica el máximo, cuándo se alcanza y el recorrido.
d. ¿Cuándo está a más de 15 m? ¿Es simétrica la gráfica? Explica en qué eje.

Ejercicio 16

Ejercicio 16 – La marea

La altura del agua en un puerto de Cádiz (en metros respecto de un nivel de referencia) se repite cada 12 horas aproximadamente. La tabla recoge las medidas de medio día y se ajusta al modelo $h(t) = 2 + 2\,\text{sen}(30°t)$, con t en horas.

Hora	0	3	6	9	12
Altura (m)	2	4	2	0	2

a. Indica el máximo y el mínimo y a qué horas se alcanzan en el primer medio día.
b. Escribe el periodo de la función y calcula la altura a las 15 h y a las 24 h.
c. ¿A qué horas del día la altura vale 3 m? ¿Y 2 m?
d. Un barco necesita al menos $2{,}5$ m de agua para entrar al puerto. ¿En qué intervalos del día puede entrar? (usa $\text{sen}\,14{,}5° \approx 0{,}25$)

Ejercicio 17

Ejercicio 17 – Las fotocopias

Una copistería de Salamanca cobra las fotocopias así: las primeras 50 a $0{,}10$ € cada una, de la $51.^{\text{a}}$ a la $100.^{\text{a}}$ a $0{,}08$ € y de la $101.^{\text{a}}$ en adelante a $0{,}06$ €. Se trata de una función del número de copias n al precio total $P(n)$.

a. Escribe $P(n)$ por tramos.
b. Calcula $P(30)$, $P(50)$, $P(80)$, $P(100)$ y $P(150)$.
c. Comprueba que la función es continua en $n = 50$ y en $n = 100$.
d. ¿Cuántas copias se hacen con 10 €? ¿Y cuánto cuesta cada copia, en media, con 150 copias?
e. Razona por qué la función es creciente aunque el precio por copia disminuya.

Ejercicio 18

Ejercicio 18 – El rectángulo de perímetro fijo

Con 20 m de valla se cerca un huerto rectangular de lados x y $10 - x$ metros.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A (m²)	?	?	?	?	?	?	?	?	?

a. Escribe el área $A(x) = x(10 - x)$ y su dominio.
b. Completa la tabla para $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.
c. ¿Para qué valor de x es máxima el área? ¿Qué forma tiene el huerto?
d. Indica el recorrido de A, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y la simetría de la gráfica.
e. Si se exige un área de al menos 21 m^2, ¿entre qué valores de x debe estar?

Ejercicio 19

Ejercicio 19 – La etapa ciclista

La gráfica distancia-tiempo de un ciclista de Cantabria en una etapa se describe así: sale a las 0 h y a las 2 h lleva 40 km; para $0{,}5$ h a tomar un refrigerio; durante la siguiente hora y media recorre otros 45 km a ritmo constante y en la última hora recorre 20 km.

a. Escribe los puntos (t, d) en los que cambia el tramo.
b. Calcula la velocidad media en cada tramo.
c. ¿En qué tramo es la función constante? ¿Qué significa?
d. Calcula la distancia total y la velocidad media de toda la etapa.
e. ¿Cuánto tiempo estuvo en movimiento y cuál fue su velocidad media sin contar la parada?

Ejercicio 20

Ejercicio 20 – Desafío: dominio, paridad y periodicidad

Resuelve estos retos.

a. Calcula el dominio de $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$.
b. Calcula el dominio de $g(x) = \dfrac{\sqrt{x + 2}}{x - 1}$.
c. Demuestra que el producto de dos funciones impares es una función par.
d. La función p tiene periodo 4 y $p(x) = x$ en $[0, 4)$. Calcula $p(5)$, $p(10)$ y $p(-1)$.