Soluciones - Funciones y sus características

Curso: 4 Eso

Solución del ejercicio 1

a. Sí: cada x tiene un único y (es $y = 2x + 1$).
b. No: $x = 1$ tiene dos imágenes distintas, 2 y 4.
c. Sí: cada persona tiene una sola fecha de nacimiento.
d. No: una misma fecha puede corresponder a dos alumnos, es decir, a dos valores distintos.

Solución del ejercicio 2

a. $f(-1) = 1 + 3 + 2 = 6$; $f(0) = 2$; $f(2) = 4 - 6 + 2 = 0$. Sustituimos cada valor en la expresión, cuidando los signos.
b. $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2) = 0$, luego $x = 1$ o $x = 2$. Factorizamos buscando dos números que sumen -3 y multipliquen 2.
c. $x^2 - 3x - 4 = 0$, $(x - 4)(x + 1) = 0$: $x = 4$ o $x = -1$. Pasamos el 6 al primer miembro y factorizamos.
d. $f(4) = 16 - 12 + 2 = 6$: el punto $(4, 6)$ sí pertenece. $f(3) = 9 - 9 + 2 = 2 \neq 1$: el punto $(3, 1)$ no pertenece.

Solución del ejercicio 3

a. Debe ser $x - 3 \geq 0$: $\operatorname{Dom} f = [3, +\infty)$. El radicando de una raíz cuadrada no puede ser negativo.
b. El denominador no puede ser cero: $x^2 - 4 = 0$ en $x = \pm 2$. $\operatorname{Dom} g = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.
c. Debe ser $9 - x^2 \geq 0$, es decir $x^2 \leq 9$: $\operatorname{Dom} h = [-3, 3]$. Los valores de x entre -3 y 3 cumplen la condición.
d. $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2) = 0$ en $x = -3$ y $x = 2$. $\operatorname{Dom} k = \mathbb{R} \setminus \{-3, 2\}$. Factorizamos el denominador y excluimos sus raíces.

Solución del ejercicio 4

a. $x^2 \geq 0$, luego $f(x) \geq 1$: recorrido $[1, +\infty)$. El valor mínimo, 1, se alcanza en $x = 0$.
b. $-x^2 \leq 0$, luego $g(x) \leq 4$: recorrido $(-\infty, 4]$. El valor máximo, 4, se alcanza en $x = 0$.
c. Una recta no horizontal toma todos los valores: recorrido $\mathbb{R}$. Para cualquier y

basta tomar $x = \dfrac{y+5}{2}$.

d. $\sqrt{x} \geq 0$, luego $k(x) \geq 2$: recorrido $[2, +\infty)$. El valor mínimo, 2, se alcanza en $x = 0$.

Solución del ejercicio 5

a. Eje Y: $f(0) = 6$, punto $(0, 6)$. Eje X: $x^2 - 5x + 6 = 0$, $x = 2$ y $x = 3$: puntos $(2, 0)$ y $(3, 0)$.
b. Eje Y: $(0, -6)$. Eje X: $2x - 6 = 0$, $x = 3$: punto $(3, 0)$.
c. Eje Y: $(0, 0)$. Eje X: $x(x-1)(x+1) = 0$: $(-1, 0)$, $(0, 0)$ y $(1, 0)$.
d. Eje Y: $k(0) = \dfrac{4}{-2} = -2$, punto $(0, -2)$. Eje X: $x + 4 = 0$, $x = -4$: punto $(-4, 0)$.

Solución del ejercicio 6

a. Dominio $[-3, 5]$. Recorrido $[-1, 4]$.
b. Crece en $(-3, -1)$ y en $(1, 3)$. Decrece en $(-1, 1)$ y en $(3, 5)$.
c. Máximos relativos en $x = -1$ ($f = 4$) y en $x = 3$ ($f = 3$). Mínimo relativo en $x = 1$ ($f = 1$). El máximo absoluto es 4 y el mínimo absoluto -1 (en $x = 5$).
d. En el punto medio del segmento entre $(-1, 4)$ y $(1, 1)$: $f(0) = \dfrac{4+1}{2} = 2{,}5$.

Solución del ejercicio 7

a. Por la izquierda $2 + 1 = 3$; por la derecha $5 - 2 = 3$ y $f(2) = 3$. Coinciden: es continua en $x = 2$.
b. Por la izquierda $1^2 = 1$; por la derecha $g(1) = 2$. Los valores no coinciden: discontinuidad de salto en $x = 1$.
c. No está definida en $x = 1$ y los valores crecen sin límite al acercarse: discontinuidad de salto infinito, con asíntota vertical.
d. $f(-1) = 0$; $f(0) = 1$; $f(1) = 2$; $f(2) = 3$; $f(3) = 2$; $f(4) = 1$. Las dos semirrectas se unen en $(2, 3)$.

Solución del ejercicio 8

a. $f(-x) = x^4 - 2x^2 = f(x)$: par (simétrica respecto del eje Y). Sustituimos x por $-x$; las potencias pares no cambian de signo.
b. $g(-x) = -x^3 + x = -g(x)$: impar (simétrica respecto del origen). Las potencias impares cambian de signo.
c. $h(-x) = x^2 - x$, que no es $h(x)$ ni $-h(x)$: ni par ni impar. Por ejemplo, $h(1) = 2$ y $h(-1) = 0$.

d. $|-x| = |x|$: k es par. $\dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x}$: m es impar.

Solución del ejercicio 9

a. $0{,}5$ h: $2{,}50$ €; 1 h: $2{,}50$ €; $1{,}5$ h: $3{,}70$ €; 2 h: $3{,}70$ €; 4 h: $6{,}10$ €; 8 h: $10{,}90$ €; 12 h: 12 € (máximo).
b. Dominio $(0, 24]$ horas. Recorrido: $\{2{,}50;\ 3{,}70;\ 4{,}90;\ \ldots;\ 12\}$, un conjunto finito de valores.
c. No es continua: tiene saltos de $1{,}20$ € cada vez que se pasa de una hora (fracción) a la siguiente.
d. 3 h 10 min son 4 horas o fracción: $2{,}50 + 3 \cdot 1{,}20 = 6{,}10$ €.

Solución del ejercicio 10

a. Independiente: la hora t. Dependiente: la temperatura T. Dominio: $[0, 24]$ horas.
b. Crece de las 6 a las 15 h y de las 21 a las 24 h; decrece de las 0 a las 6 h y de las 15 a las 21 h.
c. Máximo absoluto: 17 °C a las 15 h. Mínimo absoluto: 4 °C a las 6 h.
d. Recorrido $[4, 17]$ °C. Con 10 °C: a las 9 h (subiendo) y hacia las 19 h (bajando, entre los 12 °C de las 18 h y los 7 °C de las 21 h).

Solución del ejercicio 11

a. $V(t) = 20t$. El volumen aumenta 20 L cada minuto.
b. Dominio $[0, 25]$ min y recorrido $[0, 500]$ L. El tiempo va desde 0 hasta que se llena.
c. $20t = 500$, $t = 25$ min. $V(12) = 240$ L.
d. $V(t) = 60 + 20t$; llega a 500 L cuando $20t = 440$, $t = 22$ min. Dominio $[0, 22]$ y recorrido $[60, 500]$. Respuesta: tarda 22 minutos en llenarse.

Solución del ejercicio 12

a. $P(x) = 3 + 1{,}1x$. El precio tiene una parte fija, 3 €, y otra proporcional a los kilómetros.
b. $P(0) = 3$; $P(5) = 8{,}50$; $P(12) = 16{,}20$ €. Sustituimos cada valor de x.
c. $3 + 1{,}1x = 25$, $x = 20$ km. Igualamos a 25 y despejamos x. Respuesta: 20 km.
d. Dominio $[0, 50]$ km y recorrido $[3, 58]$ €. $P(50) = 3 + 55 = 58$ €. Respuesta: dominio $[0, 50]$ y recorrido $[3, 58]$.

Solución del ejercicio 13

a. $v(t) = 12t$ si $0 \leq t \leq 10$; $v(t) = 120$ si 10; $v(t) = 120 - 12(t - 40)$ si 40. Cada tramo tiene su propia expresión.
b. $v(5) = 60$ km/h; $v(20) = 120$ km/h; $v(45) = 120 - 60 = 60$ km/h. Elegimos el tramo según el valor de t.
c. Crece en $(0, 10)$, es constante en $(10, 40)$ y decrece en $(40, 50)$.
d. 30 min $= 0{,}5$ h a 120 km/h: 60 km. La distancia es la velocidad por el tiempo.

Solución del ejercicio 14

a. $B(0) = -36$; $B(2) = -4 + 40 - 36 = 0$; $B(10) = -100 + 200 - 36 = 64$.
b. $-x^2 + 20x - 36 = 0$ da $x^2 - 20x + 36 = 0$, $(x - 2)(x - 18) = 0$: $x = 2$ y $x = 18$.
c. Vértice en $x = \dfrac{-20}{-2} = 10$, $B(10) = 64$: con 10 sesiones el beneficio máximo es 64 cientos de euros, $6\,400$ €.
d. Crece en $(0, 10)$ y decrece en $(10, 20)$. Con $B(0) = -36$ y $B(20) = -400 + 400 - 36 = -36$, el recorrido es $[-36, 64]$.

Solución del ejercicio 15

a. $h(0) = 0$; $h(1) = 15$; $h(2) = 20$; $h(3) = 15$; $h(4) = 0$ m. Sustituimos cada valor de t.
b. La pelota vuelve al suelo cuando $h = 0$: $5t(4 - t) = 0$, $t = 4$ s. Dominio $[0, 4]$.
c. Máximo: 20 m en $t = 2$ s. Recorrido $[0, 20]$.
d. $20t - 5t^2 > 15$ equivale a $t^2 - 4t + 3$, $(t - 1)(t - 3)$: 1. La gráfica es simétrica respecto de la recta vertical $t = 2$.

Solución del ejercicio 16

a. Máximo 4 m a las 3 h; mínimo 0 m a las 9 h.
b. Periodo 12 h. $h(15) = h(3) = 4$ m y $h(24) = h(12) = 2$ m.
c. $2 + 2\,\text{sen}(30°t) = 3$ da $\text{sen}(30°t) = 0{,}5$, es decir $30°t = 30°$ o $150°$: $t = 1$ h o $t = 5$ h (y, por la repetición, 13 h y 17 h). La altura vale 2 m cuando el seno es 0: a las 0, 6, 12, 18 y 24 h.
d. Hace falta $\text{sen}(30°t) \geq 0{,}25$, es decir $14{,}5° \leq 30°t \leq 165{,}5°$, luego $0{,}48 \leq t \leq 5{,}52$ h. Con la repetición, también de las $12{,}48$ h a las $17{,}52$ h. Puede entrar de las $0{,}5$ h a las $5{,}5$ h y de las $12{,}5$ h a las $17{,}5$ h, aproximadamente.

Solución del ejercicio 17

a. $P(n) = 0{,}10n$ si $0 \leq n \leq 50$; $P(n) = 5 + 0{,}08(n - 50)$ si 50; $P(n) = 9 + 0{,}06(n - 100)$ si $n > 100$.

b. $P(30) = 3$; $P(50) = 5$; $P(80) = 5 + 2{,}40 = 7{,}40$; $P(100) = 9$; $P(150) = 12$ €.
c. En $n = 50$: $0{,}10 \cdot 50 = 5$ y $5 + 0 = 5$. En $n = 100$: $5 + 0{,}08 \cdot 50 = 9$ y $9 + 0 = 9$. Los valores coinciden: continua.
d. Con 10 €: $9 + 0{,}06(n - 100) = 10$, $n - 100 = \dfrac{50}{3} \approx 16{,}7$, luego 116 copias completas. Con 150 copias: $\dfrac{12}{150} = 0{,}08$ € por copia.
e. Cada copia adicional siempre cuesta más de 0 €, aunque cada vez menos; por eso el total nunca disminuye.

Solución del ejercicio 18

a. $A(x) = 10x - x^2$, con 0.
b. $9;\ 16;\ 21;\ 24;\ 25;\ 24;\ 21;\ 16;\ 9$ m^2.
c. Máxima en $x = 5$: 25 m^2. Es un cuadrado de 5×5.
d. Recorrido $(0, 25]$. Crece en $(0, 5)$ y decrece en $(5, 10)$. Simétrica respecto de la recta $x = 5$.
e. $10x - x^2 \geq 21$ equivale a $x^2 - 10x + 21 \leq 0$, $(x - 3)(x - 7) \leq 0$: $3 \leq x \leq 7$.

Solución del ejercicio 19

a. Puntos: $(0, 0)$, $(2, 40)$, $(2{,}5;\ 40)$, $(4;\ 85)$ y $(5;\ 105)$.
b. Tramo 1: $\dfrac{40}{2} = 20$ km/h. Tramo 2: 0 km/h. Tramo 3: $\dfrac{45}{1{,}5} = 30$ km/h. Tramo 4: $\dfrac{20}{1} = 20$ km/h.
c. En el segundo tramo la distancia no cambia: el ciclista está parado.
d. Distancia total $40 + 45 + 20 = 105$ km en 5 h: $\dfrac{105}{5} = 21$ km/h.
e. En movimiento: $5 - 0{,}5 = 4{,}5$ h. Velocidad media $\dfrac{105}{4{,}5} \approx 23{,}3$ km/h.

Solución del ejercicio 20

a. Debe ser $x^2 - 4x + 3 \geq 0$, $(x - 1)(x - 3) \geq 0$: $\operatorname{Dom} f = (-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$. La parábola es positiva fuera de sus raíces.
b. Radicando $x + 2 \geq 0$ da $x \geq -2$; además $x \neq 1$. $\operatorname{Dom} g = [-2, 1) \cup (1, +\infty)$. El denominador no puede ser cero.
c. Si f y g son impares, $(fg)(-x) = f(-x)g(-x) = (-f(x))(-g(x)) = f(x)g(x)$: fg es par.
d. $p(5) = p(1) = 1$; $p(10) = p(2) = 2$; $p(-1) = p(3) = 3$. Restamos o sumamos el periodo hasta caer en $[0, 4)$.