Soluciones - Estadística: medidas de localización y dispersión

Curso: 4 Eso

Solución del ejercicio 1

a. Frecuencias absolutas: 0: 2; 1: 8; 2: 9; 3: 3; 4: 1; 5: 1. Relativas: $\frac{2}{24} \approx 0{,}083$; $0{,}333$; $0{,}375$; $0{,}125$; $0{,}042$; $0{,}042$. Acumuladas: $2,\ 10,\ 19,\ 22,\ 23,\ 24$.

b. Moda $= 2$ (frecuencia 9). Mediana: los datos $12.^{\circ}$ y $13.^{\circ}$ son 2 y 2, luego $Me = 2$. Media: $\frac{44}{24} = 1{,}833$.

c. $F(2) = 19$, así que $\frac{19}{24} \approx 79{,}2\ \%$.

d. $\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2 f_i}{24} - \bar{x}^2 = 4{,}667 - 3{,}361 = 1{,}306$ y $\sigma \approx 1{,}14$.

Solución del ejercicio 2

a. Ordenados: $11, 12, 13, 14, 15, 15, 15, 16, 17, 18, 20$. Suma $= 166$, media $= \frac{166}{11} \approx 15{,}09$. Mediana (6.º dato) $= 15$. Moda $= 15$.

b. Con 12 datos: suma $= 226$, media $= \frac{226}{12} \approx 18{,}83$. Mediana: $\frac{15+15}{2} = 15$. Moda $= 15$.

c. La media sube de $15{,}09$ a $18{,}83$, mientras que mediana y moda no cambian. La media usa todos los valores y los datos extremos la desplazan.

d. La mediana (o la moda), porque no se ve afectada por el dato atípico 60.

Solución del ejercicio 3

a. Marcas: $155,\ 165,\ 175,\ 185$. Acumuladas: $4,\ 15,\ 24,\ 30$.

b. $\sum x_i f_i = 5120$, $\bar{x} = 170{,}67$ cm. $\sum x_i^2 f_i = 876550$ y $\sigma^2 = 91{,}22$, $\sigma \approx 9{,}55$ cm.

c. El intervalo modal es $[160, 170)$ (frecuencia 11). El $15.^{\circ}$ dato (mitad de 30) cae en el intervalo $[160, 170)$, que es también el intervalo mediano.

d. Menos de 170 cm: $4 + 11 = 15$ alumnos, es decir $50\ \%$.

Solución del ejercicio 4

a. $\bar{x} = \dfrac{4+8+9+11+18}{5} = \dfrac{50}{5} = 10$ minutos. Sumamos los cinco datos y dividimos entre 5.
b. Desviaciones: $-6,\ -2,\ -1,\ 1,\ 8$. Cuadrados: $36,\ 4,\ 1,\ 1,\ 64$ (suma 106). Restamos la media a cada dato; la suma de las desviaciones siempre es cero: $-6-2-1+1+8=0$.
c. $\sigma^2 = \dfrac{106}{5} = 21{,}2$ y $\sigma = \sqrt{21{,}2} \approx 4{,}60$ minutos. La varianza es la media de los cuadrados de las desviaciones, y la desviación típica su raíz cuadrada.
d. $\sum x_i^2 = 16+64+81+121+324 = 606$; $\dfrac{606}{5} - 10^2 = 121{,}2 - 100 = 21{,}2$. Coincide. Respuesta: las dos fórmulas dan la misma varianza, 21,2.

Solución del ejercicio 5

a. $CV_A = \dfrac{1{,}1}{6{,}2} \approx 17{,}7\ \%$ y $CV_B = \dfrac{2{,}0}{5{,}4} \approx 37\ \%$.
b. El grupo A, porque su coeficiente de variación es menor.
c. Media $5{,}4 \cdot 1{,}5 = 8{,}1$ y desviación $2{,}0 \cdot 1{,}5 = 3{,}0$; el coeficiente no cambia: $\dfrac{3}{8{,}1} \approx 37\ \%$.
d. $6{,}2 \pm 1{,}1$ da el intervalo $[5{,}1;\ 7{,}3]$: es donde se concentra la mayoría de las notas del grupo A.

Solución del ejercicio 6

a. $n = 12$. $Me = \dfrac{9+10}{2} = 9{,}5$. Mitad inferior: $3, 5, 6, 7, 8, 9$ con $Q_1 = \dfrac{6+7}{2} = 6{,}5$. Mitad superior: $10, 12, 13, 14, 15, 30$ con $Q_3 = \dfrac{13+14}{2} = 13{,}5$.
b. Rango $= 30 - 3 = 27$. $IQR = 13{,}5 - 6{,}5 = 7$.
c. $6{,}5 - 1{,}5 \cdot 7 = -4$ y $13{,}5 + 1{,}5 \cdot 7 = 24$. El dato $30 > 24$ es atípico; los demás están dentro.
d. Caja de $6{,}5$ a $13{,}5$ con la mediana en $9{,}5$; bigotes de 3 a 15 y el punto aislado 30.

Solución del ejercicio 7

a. Suma $= 77$, media $= 11$. Ordenados: $8, 9, 10, 11, 12, 13, 14$; mediana $= 11$.
b. Rango $= 14 - 8 = 6$. $\sigma^2 = \dfrac{9+4+1+0+1+4+9}{7} = 4$ y $\sigma = 2$.
c. Media 14 y desviación típica 2 (no cambia al sumar una constante).
d. Media $= 1{,}8 \cdot 11 + 32 = 51{,}8\ ^\circ$F y desviación $1{,}8 \cdot 2 = 3{,}6$.

Solución del ejercicio 8

a. Ordenados: $12{,}4;\ 12{,}4;\ 12{,}4;\ 12{,}8;\ 12{,}9;\ 13{,}0;\ 13{,}1;\ 13{,}1;\ 13{,}6;\ 14{,}2$. Moda $= 12{,}4$. Mediana $= \dfrac{12{,}9 + 13{,}0}{2} = 12{,}95$. Media $= \dfrac{129{,}9}{10} = 12{,}99$ s.
b. $\sigma^2 = 0{,}295$ y $\sigma \approx 0{,}54$ s.
c. El intervalo es $[12{,}45;\ 13{,}53]$. Dentro están 5 atletas.
d. $Q_1 = 12{,}4$ (3.er dato), $Q_3 = 13{,}1$ (8.º dato), $IQR = 0{,}7$.

Solución del ejercicio 9

a. Grupo A ($n = 24$): $\bar{x} = 5{,}88$ y $\sigma = 1{,}13$. Grupo B ($n = 24$): $\bar{x} = 6{,}21$ y $\sigma = 2{,}52$.
b. $CV_A = 19{,}2\ \%$ y $CV_B = 40{,}5\ \%$.
c. La media más alta es la del grupo B y el más homogéneo es el A, porque tiene menor coeficiente de variación.
d. La media describe mejor al grupo A, donde las notas se concentran cerca de ella; en el grupo B hay muchos suspensos y muchos sobresalientes y la media no refleja a casi nadie.

Solución del ejercicio 10

a. f_i: $3, 6, 6, 4, 1$. h_i: $0{,}15;\ 0{,}30;\ 0{,}30;\ 0{,}20;\ 0{,}05$. F_i: $3, 9, 15, 19, 20$.
b. $\sum x_i f_i = 34$ y $\bar{x} = 1{,}7$ goles. $\sum x_i^2 f_i = 82$, $\sigma^2 = 1{,}21$ y $\sigma \approx 1{,}1$.
c. Más de 2 goles: $4 + 1 = 5$ partidos, $\dfrac{5}{20} = 25\ \%$.
d. Modas: 1 y 2 (bimodal). Mediana: datos $10.^{\circ}$ y $11.^{\circ}$ valen 2 y 2, luego $Me = 2$. $Q_1 = 1$ y $Q_3 = 2{,}5$.

Solución del ejercicio 11

a. Marcas: $20, 30, 40, 50, 60$. Acumuladas: $18, 52, 80, 94, 100$.
b. $\bar{x} = \dfrac{3560}{100} = 35{,}6$ años. $\sigma^2 = 124{,}64$ y $\sigma \approx 11{,}16$ años.
c. Intervalo modal $[25, 35)$ (34 socios). Como $\dfrac{n}{2} = 50$ y la acumulada alcanza 52 en $[25, 35)$, ese es también el intervalo mediano.
d. $18 + 34 = 52$ socios: el $52\ \%$.

Solución del ejercicio 12

a. Suma $= 127$, media $= 14{,}11$ €. Mediana (5.º dato) $= 12$ €.
b. Mitad inferior (sin la mediana): $9, 10, 11, 11$, $Q_1 = 10{,}5$. Mitad superior:

$12, 13, 14, 35$, $Q_3 = 13{,}5$. $IQR = 3$.

c. Límite superior $13{,}5 + 1{,}5 \cdot 3 = 18$. El precio 35 supera ese límite: es atípico. Límite inferior $10{,}5 - 4{,}5 = 6$: ninguno por debajo.

d. Sin el 35: suma 92, media $= 11{,}5$ € y mediana $\dfrac{11 + 12}{2} = 11{,}5$ €. La media baja casi 3 euros; la mediana apenas cambia.

Solución del ejercicio 13

a. Ordenados: $45, 46, 48, 50, 52, 55, 57, 58, 62, 64, 70, 74$. Mediana $= \dfrac{55 + 57}{2} = 56$ €.

b. $Q_1 = \dfrac{48 + 50}{2} = 49$ y $Q_3 = \dfrac{62 + 64}{2} = 63$. $IQR = 14$ €.

c. Suma $= 681$, media $= 56{,}75$ €. $\sigma^2 \approx 79{,}69$ y $\sigma \approx 8{,}93$ €.

d. Límite $\bar{x} + \sigma \approx 65{,}68$ €: lo superan los meses con 70 y 74 €, los de más gasto (calefacción y aire acondicionado).

Solución del ejercicio 14

a. Rectángulos de alturas $5, 12, 15, 10, 8$. Intervalo modal: $[2, 3)$.

b. $\bar{x} = 2{,}58$ h y $\sigma^2 = 1{,}47$, $\sigma \approx 1{,}21$ h.

c. Acumuladas: $5, 17, 32, 42, 50$. Como $\dfrac{n}{2} = 25$, el intervalo mediano es $[2, 3)$ y $Me = 2 + \dfrac{25 - 17}{15} \cdot 1 \approx 2{,}53$ h.

d. $10 + 8 = 18$ alumnos, es decir $36\ \%$.

Solución del ejercicio 15

a. Marcas: $2{,}5;\ 7{,}5;\ 12{,}5;\ 17{,}5;\ 22{,}5$. Acumuladas: $6,\ 20,\ 32,\ 38,\ 40$.

b. $\sum x_i f_i = 420$ y $\bar{x} = 10{,}5$ min. $\sigma^2 = 28{,}5$ y $\sigma \approx 5{,}34$ min.

c. $\dfrac{n}{2} = 20$ se alcanza en $[5, 10)$ (acumulada 20): $Me = 5 + \dfrac{20 - 6}{14} \cdot 5 = 10$ min. El intervalo modal es $[5, 10)$ (14 usuarios).

d. Menos de 10: $\dfrac{20}{40} = 50\ \%$. Más de 15: $\dfrac{6 + 2}{40} = 20\ \%$.

e. Media $\approx 10{,}5$ min > 9: no cumple. Como los tiempos están asimétricos hacia valores altos, conviene mirar también la mediana (10 min) y el porcentaje de usuarios que esperan más de 15 min.

Solución del ejercicio 16

a. $\bar{x}_1 = 500$ g y $\bar{x}_2 = 500$ g.

b. $\sigma_1 = 1{,}22$ g y $\sigma_2 = 8{,}2$ g.
c. $CV_1 = 0{,}24\ \%$ y $CV_2 = 1{,}64\ \%$. La máquina 1 es mucho más regular.
d. Válidos son los pesos en $[495, 505]$. Máquina 1: los 8. Máquina 2: $505, 495, 500, 500$, es decir 4 de 8.
e. Las dos tienen media cercana a 500 g, pero la máquina 2 es muy irregular: debe revisarse, porque la mitad de sus paquetes quedan fuera de la tolerancia.

Solución del ejercicio 17

a. Suma $= 18\,250$, media $= 2281{,}25$ €. Mediana $= \dfrac{1300 + 1350}{2} = 1325$ €. Moda $= 1250$ €.
b. La media supera $2\,000$ € solo por el sueldo de 9000 €. La mediana (1325 €) o la moda representan mejor a la plantilla.
c. Con todos: $\sigma \approx 2541{,}03$ €. Sin el de 9000: media $= 1321{,}43$ € y $\sigma \approx 95{,}83$ €.
d. Subida de 100 €: la media aumenta 100 € y la desviación no cambia. Subida del $5\ \%$: media y desviación se multiplican por $1{,}05$.

Solución del ejercicio 18

a. Multiplicamos por $0{,}01$: media $0{,}5$ m y desviación típica $0{,}0707$ m ($7{,}07 \cdot 0{,}01$).
b. La media pasa a 60 cm y la desviación típica no cambia ($7{,}07$ cm).
c. La media pasa a 100 cm, la desviación típica a $14{,}14$ cm y la varianza se multiplica por 4 (200). El coeficiente de variación no cambia: $\dfrac{14{,}14}{100} = \dfrac{7{,}07}{50} = 14{,}1\ \%$.
d. Datos nuevos: $50, 55, 60, 65, 70$, media 60 y $\sigma^2 = \dfrac{100 + 25 + 0 + 25 + 100}{5} = 50$, $\sigma \approx 7{,}07$. Coincide.

Solución del ejercicio 19

a. A (ordenados $57{,}8;\ 57{,}9;\ 58{,}0;\ 58{,}2;\ 58{,}3;\ 58{,}5;\ 58{,}6;\ 59{,}1$): $Me = 58{,}25$, $Q_1 = 57{,}95$, $Q_3 = 58{,}55$, rango $1{,}3$. B (ordenados $57{,}1;\ 57{,}5;\ 58{,}0;\ 58{,}4;\ 58{,}9;\ 59{,}8;\ 60{,}2;\ 61{,}0$): $Me = 58{,}65$, $Q_1 = 57{,}75$, $Q_3 = 60$, rango $3{,}9$.
b. $IQR_A = 0{,}6$ s e $IQR_B = 2{,}25$ s.
c. La caja de A es mucho más estrecha: A es más regular. El mejor tiempo es el de B ($57{,}1$ s).
d. $\bar{x}_A = 58{,}3$ s con $\sigma_A = 0{,}4$ y $\bar{x}_B = 58{,}86$ s con $\sigma_B = 1{,}28$. La dispersión de B es varias veces mayor.
e. Si importa la regularidad, el nadador A. Si se busca el mejor tiempo posible, B, a costa de arriesgar tiempos peores.

Solución del ejercicio 20

a. Suma total $= 5 \cdot 8 = 40$; los cuatro conocidos suman 33, luego el quinto es 7.

b. Suma $= 4 \cdot 10 = 40$. Mediana $9{,}5$ significa $\dfrac{b+c}{2} = 9{,}5$, es decir $b + c = 19$, y entonces $a + d = 21$. Con $d - a = 11$ resulta $d = 16$ y $a = 5$. Como 5 y $b + c = 19$, sirven $b = 9$ y $c = 10$. Datos: $5,\ 9,\ 10,\ 16$.

c. $\sum(x_i - \bar{x}) = \sum x_i - n\bar{x} = n\bar{x} - n\bar{x} = 0$.

d. La media no cambia, porque el nuevo dato no aporta desviación. La varianza disminuye: con $2, 4, 6$ ($\bar{x} = 4$, $\sigma^2 = \dfrac{8}{3}$) y añadiendo 4, $\sigma^2 = \dfrac{8}{4} = 2$.