Apuntes - Ecuaciones y sistemas

Curso: 4 Eso

En este tema aprenderás: ecuaciones de primer grado, ecuaciones de segundo grado, sistemas de ecuaciones lineales, sistemas no lineales sencillos (Matemáticas B) y resolución de problemas. Cada idea va en un cuadro de color, con ejemplos resueltos paso a paso.

Actividad de introducción: el precio de la merienda

En una cafetería de Santander, dos amigos piden 2 batidos y 3 bocadillos y pagan 13 €; otros dos piden 3 batidos y 1 bocadillo y pagan 9 €. ¿Cuánto cuesta cada batido y cada bocadillo? Con una sola ecuación hay demasiadas respuestas posibles: el batido podría costar 1 € y el bocadillo $3{,}67$ €, o el batido 3 € y el bocadillo $2{,}33$ €, y así sucesivamente. Necesitamos **dos ecuaciones a la vez** y los valores que cumplan ambas: un **sistema**. En este tema repasarás las ecuaciones de primer y segundo grado y aprenderás a resolver sistemas de varias formas, a clasificarlos y a usarlos en problemas de la vida diaria, como el de la merienda, que podrás resolver tú mismo al terminar la lección.

Ecuaciones de primer grado

Definición: ecuación

Una **ecuación** es una igualdad con una incógnita que solo se cumple para ciertos valores, las **soluciones**. Las de primer grado se resuelven pasando los términos con x a un lado y los números al otro: $3x - 7 = 2x + 5 \Rightarrow x = 12$. Si hay denominadores, se multiplica toda la ecuación por el mcm: $\frac{x+1}{2} - \frac{x-2}{3} = 2$ se multiplica por 6 y queda $3(x+1) - 2(x-2) = 12$, es decir, $x + 7 = 12$ y $x = 5$.

Ecuaciones de segundo grado

Propiedad: ecuaciones de segundo grado

Una ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ (con $a \neq 0$) se resuelve con la fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

El **discriminante** $\Delta = b^2 - 4ac$ indica cuántas soluciones reales hay:

- $\Delta > 0$: dos soluciones distintas.
- $\Delta = 0$: una solución doble $x = -\frac{b}{2a}$.
- Δ: ninguna solución real.

Ejemplo 1

$2x^2 + 3x - 2 = 0$

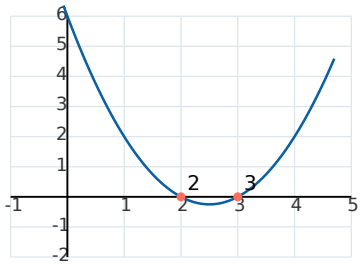
$\Delta = 9 + 16 = 25$, $x = \frac{-3 \pm 5}{4}$, luego $x = \frac{1}{2}$ o $x = -2$.

Propiedad

Ecuaciones incompletas. Si $b = 0$, $ax^2 + c = 0$ se despeja:
$2x^2 - 8 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$. Si $c = 0$, se saca factor común:
$3x^2 - 12x = 3x(x - 4) = 0 \Rightarrow x = 0$ o $x = 4$.

Regla

Las soluciones son los puntos donde la parábola $y = ax^2 + bx + c$ corta al eje de abscisas. Para $x^2 - 5x + 6 = 0$, las soluciones son 2 y 3.



Observación

Relaciones útiles (fórmulas de Cardano-Vieta): si x_1 y x_2 son las soluciones, $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ y $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$. En $x^2 - 5x + 6 = 0$: suma 5 y producto 6.

Cómo se hace: resolver una ecuación de segundo grado

1. Lleva la ecuación a la forma $ax^2 + bx + c = 0$.
2. Si $b = 0$ despeja x^2; si $c = 0$ saca factor común x.
3. En los demás casos calcula $\Delta = b^2 - 4ac$ y aplica la fórmula.
4. Comprueba las soluciones en la ecuación original.

Sistemas de ecuaciones lineales

Método: sistemas de ecuaciones lineales

Un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas se resuelve por uno de tres métodos:

- **Sustitución:** se despeja una incógnita en una ecuación y se sustituye en la otra.

- **Igualación:** se despeja la misma incógnita en ambas y se igualan.
- **Reducción:** se suman o restan las ecuaciones (multiplicándolas antes si hace falta) para eliminar una incógnita.

Ejemplo 2: reducción

$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 4x - 3y = 6 \end{cases}$.

Sumando: $6x = 18$, $x = 3$. Entonces $6 + 3y = 12$, $y = 2$.

Propiedad

Según el número de soluciones, un sistema es **compatible determinado** (una solución: las rectas se cortan), **incompatible** (ninguna: rectas paralelas, como $x + y = 3$ y $2x + 2y = 8$) o **compatible indeterminado** (infinitas: rectas coincidentes, como $x - y = 2$ y $2x - 2y = 4$).

Sistemas no lineales sencillos (Matemáticas B)

Regla

Cuando una ecuación es de primer grado y la otra de segundo, se despeja en la lineal y se sustituye. Ejemplo: $\begin{cases} y = x + 1 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$. Se sustituye: $x^2 + (x+1)^2 = 25 \Rightarrow 2x^2 + 2x - 24 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0$, con $x = 3$ o $x = -4$. Los pares son $(3, 4)$ y $(-4, -3)$. Siempre hay que calcular la segunda incógnita para cada valor y comprobar en ambas ecuaciones.

Resolución de problemas

Método: resolución de problemas

1. Lee y define las incógnitas con letras.
2. Traduce cada condición a una ecuación.
3. Resuelve el sistema o la ecuación.
4. Comprueba que la solución tiene sentido (un lado no puede ser negativo; una edad, tampoco).

Ejemplo 2

La suma de dos números es 25 y su diferencia es 7.

Se plantea $x + y = 25$, $x - y = 7$; sumando, $2x = 32$, $x = 16$, $y = 9$.

Ejemplo 4: producto de dos números consecutivos

El producto de dos números naturales consecutivos es 156. ¿Cuáles son?

Sea x el menor: $x(x+1)=156$, es decir, $x^2+x-156=0$. Entonces $\Delta = 1+624=625$ y $x=\frac{-1\pm 25}{2}$, que da $x=12$ o $x=-13$. Como buscamos números naturales, la solución es 12 y 13, y $12\cdot 13=156$.

¡Atención! Errores frecuentes

- Olvidar el $\pm$ al hacer la raíz cuadrada: $x^2=4$ tiene dos soluciones.
- Dividir entre x en $x^2=3x$: se pierde la solución $x=0$. Hay que sacar factor común.
- Usar mal los signos en la fórmula: si b es negativo, $-b$ es positivo.
- No comprobar las soluciones de los problemas.

Ecuaciones con radicales y con fracciones (ampliación)

Método: resolver una ecuación con una raíz

1. Aísla la raíz en un miembro de la ecuación.
2. Eleva al cuadrado los dos miembros (si el índice es 2).
3. Resuelve la ecuación que resulta.
4. **Comprueba cada solución** en la ecuación original: al elevar al cuadrado pueden aparecer soluciones falsas.

Ejemplo 3

Resuelve $\sqrt{2x+3}=x$.

Elevamos al cuadrado: $2x+3=x^2$, es decir $x^2-2x-3=0$, $(x-3)(x+1)=0$. Comprobamos: $x=3$ da $\sqrt{9}=3$, vale; $x=-1$ da $\sqrt{1}=1\neq -1$, no vale. La única solución es $x=3$.

Propiedad: número de soluciones de un sistema lineal $2 imes 2$

Cada ecuación lineal con dos incógnitas representa una recta. Si las rectas se **cortan**, el sistema es compatible determinado (una solución); si **coinciden**, es compatible indeterminado (infinitas soluciones); si son **paralelas**, es incompatible (ninguna). En el sistema $a_1x+b_1y=c_1$, $a_2x+b_2y=c_2$ ocurre lo primero cuando $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$.

Ejemplo 4

Estudia el sistema $x+2y=4$, $3x+6y=12$ y el sistema $x+2y=4$, $3x+6y=10$.

En el primero, $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{4}{12}$: las dos ecuaciones son la misma recta y hay infinitas soluciones. En el segundo, $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} \neq \frac{4}{10}$: son rectas paralelas y no hay solución.

¡Atención! Errores habituales

- Al pasar un término de un miembro a otro hay que cambiarle el signo.
- Con la fórmula general, no olvides dividir **todo** el numerador entre $2a$.
- En un sistema, si multiplicas una ecuación por un número, multiplícala completa, incluido el término independiente.
- En los problemas, escribe siempre qué representa cada incógnita y comprueba la solución en el enunciado.

Elegir el método para un sistema

La **sustitución** conviene cuando alguna incógnita tiene coeficiente 1 o -1. La **igualación** es cómoda cuando las dos ecuaciones están ya despejadas. La **reducción** es la mejor si los coeficientes de una incógnita son iguales u opuestos o se pueden igualar con una multiplicación sencilla. Los tres métodos dan el mismo resultado: elige el que menos cálculos necesite.

Resolver problemas paso a paso

Método: de la situación al sistema

1. Lee el enunciado dos veces y subraya los datos numéricos y lo que se pide.
2. Elige una letra para cada incógnita y escribe qué significa, con sus unidades.
3. Traduce cada frase del enunciado a una ecuación: «el triple de» es $3x$, «supera en 7» es $+7$, «suman» es $+$.
4. Resuelve con el método más cómodo.
5. Comprueba la solución en el texto del problema y responde con una frase completa.

Ejemplo 5

Un bolígrafo y un cuaderno cuestan $3{,}50$ €. El cuaderno cuesta 2 € más que el bolígrafo. ¿Cuánto cuesta cada cosa?

Sean b el precio del bolígrafo y c el del cuaderno. Las ecuaciones son $b + c = 3{,}50$ y $c = b + 2$. Por sustitución, $b + b + 2 = 3{,}50$, $2b = 1{,}50$ y $b = 0{,}75$ €. Entonces $c = 2{,}75$ €. Comprobación: $0{,}75 + 2{,}75 = 3{,}50$ y $2{,}75 - 0{,}75 = 2$.

Ejemplo 6

El área de un rectángulo es 48 cm^2 y su largo mide 2 cm más que el doble de su ancho. Calcula sus dimensiones.

Si el ancho es x, el largo es $2x+2$ y el área $x(2x+2)=48$, es decir $2x^2+2x-48=0$, o bien $x^2+x-24=0$. Entonces $\Delta = 1+96=97$ y $x=\dfrac{-1+\sqrt{97}}{2}\approx 4{,}42$ cm (la solución negativa no vale). El largo mide $2\cdot 4{,}42+2\approx 10{,}85$ cm.

¿Sabías que?

Hace más de dos mil años, los matemáticos chinos resolvían sistemas de ecuaciones colocando los coeficientes en una tabla de varillas, un método muy parecido al que hoy se conoce como método de Gauss. Los sistemas están detrás de los mapas del GPS, de la economía y de la ingeniería: un puente o un avión se calculan resolviendo sistemas de miles de ecuaciones con ordenadores.

Ecuaciones bicuadradas y ecuaciones racionales

Método: resolver una ecuación bicuadrada

1. Comprueba que la ecuación solo tiene potencias pares de x: $ax^4+bx^2+c=0$.
2. Haz el cambio de variable $z=x^2$, que la convierte en una ecuación de segundo grado $az^2+bz+c=0$.
3. Resuelve esa ecuación con la fórmula general o factorizando.
4. Deshaz el cambio: cada solución positiva de z da dos valores de x, $\pm\sqrt{z}$; si $z=0$, da $x=0$; y si z es negativo, no da soluciones reales.

Ejemplo 7

Resuelve $x^4-13x^2+36=0$.

Hacemos $z=x^2$ y queda $z^2-13z+36=0$. El discriminante es $169-144=25$, así que $z=\dfrac{13\pm 5}{2}$, es decir, $z=9$ o $z=4$. Deshacemos el cambio: si $x^2=9$, entonces $x=3$ o $x=-3$; si $x^2=4$, entonces $x=2$ o $x=-2$. La ecuación tiene cuatro soluciones: -3, -2, 2 y 3. Comprobamos una de ellas: $81-117+36=0$.

Observación: ecuaciones con la incógnita en el denominador

Para resolver una ecuación como $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{3}{4}$, multiplicamos los dos miembros por el mínimo común múltiplo de los denominadores. Así obtenemos una ecuación polinómica más sencilla. Pero al final hay que descartar cualquier solución que anule algún denominador, porque en ese valor la ecuación original no tiene sentido.

El consejo de Otto

Calcula primero el discriminante. Si es un cuadrado perfecto, las soluciones serán racionales y podrás factorizar con comodidad.