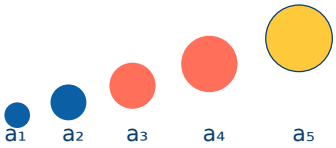
Apuntes - Patrones y sucesiones

Curso: 3 Eso

En este tema aprenderás: patrones y sucesiones, progresiones aritméticas, progresiones geométricas, cómo hallar el término general de un patrón, progresiones en la vida real y sucesiones de figuras. Cada idea va en un cuadro de color, con ejemplos resueltos paso a paso.

Actividad de introducción: el truco de Gauss

Cuenta la historia que un maestro alemán, para tener a sus alumnos entretenidos, les mandó sumar todos los números del 1 al 100. Un niño de unos diez años, Carl Friedrich Gauss, dio la respuesta casi enseguida: 5 050. Se había dado cuenta de que $1+100=101$, $2+99=101$, $3+98=101$ y así hasta 50 parejas, que dan $50\cdot 101=5\,050$. Esa idea es la base de la fórmula de la suma de una progresión aritmética. Una sucesión es una lista ordenada de números que sigue una regla, como $2,4,6,8,\ldots$ o $3,6,12,24,\ldots$. Descubrir el patrón y escribir una fórmula para cualquier término es una de las habilidades centrales de las matemáticas, y sirve para predecir el ahorro de una hucha, el número de asientos de un teatro o el valor de un coche con los años.



Patrones y sucesiones

Definición: sucesión

Una **sucesión** es una lista ordenada de números llamados **términos**: $a_1, a_2, a_3, \ldots$ El subíndice indica el lugar que ocupa cada término. Muchas sucesiones siguen un **patrón** o regla de formación que permite continuarlas. En la sucesión $3, 7, 11, 15, \ldots$ cada término se obtiene sumando 4 al anterior. Se puede dar la regla de dos formas:

- **Recurrente:** cada término se calcula a partir de los anteriores ($a_{n+1} = a_n + 4$, con $a_1 = 3$).
- **Término general:** una fórmula que da directamente a_n a partir de n. Aquí, $a_n = 4n - 1$, por lo que $a_{10} = 39$ sin tener que calcular los anteriores.

Observación

Otras sucesiones conocidas: los cuadrados $1, 4, 9, 16, \ldots$ con $a_n = n^2$; los impares $1, 3, 5, 7, \ldots$ con $a_n = 2n - 1$; y la sucesión de Fibonacci $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$, en la que cada término es la suma de los dos anteriores.

Progresiones aritméticas

Definición: progresión aritmética

Una **progresión aritmética** es una sucesión en la que la diferencia entre dos términos consecutivos es constante. Esa constante es la **diferencia** d. Su término general es:

Propiedad

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$$

Regla

Si $d > 0$ la progresión crece y si d decrece. Ejemplo: $a_1 = 5$ y $d = 3$ dan $a_{20} = 5 + 19 \cdot 3 = 62$. Si se conocen dos términos, se halla d con $d = \frac{a_m - a_k}{m-k}$. Con $a_3 = 11$ y $a_7 = 23$: $d = \frac{12}{4} = 3$, $a_1 = 5$ y $a_n = 3n + 2$.

Definición: suma de los n primeros términos

La **suma de los n primeros términos** es $S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2}$. Esta fórmula la descubrió el joven Gauss al sumar $1 + 2 + \cdots + 100$: hay 50 parejas que suman 101, es decir, $S_{100} = 5\,050$.

Progresiones geométricas

Definición: progresión geométrica

Una **progresión geométrica** es una sucesión en la que el cociente entre dos términos consecutivos es constante: la **razón** r. Su término general es:

Propiedad

$$a_n = a_1 \cdot r^{\,n-1}$$

Ejemplo 1

$2, 6, 18, 54, \ldots$ **tiene** $r = 3$ **y** $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$**, luego** $a_6 = 2 \cdot 243 = 486$**.**

Si 0 la progresión decrece hacia cero: $64, 32, 16, 8, 4, \ldots$ con $r = \frac{1}{2}$.

Regla

La suma de los n primeros términos, para $r \neq 1$, es $S_n = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1}$. Por ejemplo, $2+4+8+\cdots$ con 10 términos vale $\frac{2(2^{10}-1)}{2-1} = 2\,046$.

Cómo hallar el término general de un patrón

Método: cómo hallar el término general de un patrón

Para descubrir la regla de una sucesión se estudia cómo cambian los términos:

1. Se calculan las diferencias entre términos consecutivos. Si son todas iguales, es aritmética y la diferencia es el coeficiente de n: $a_n = dn + b$.
2. Si las diferencias no son constantes pero los cocientes sí, es geométrica.
3. Si las diferencias crecen de forma regular (1, 3, 5, 7, ...), aparecen cuadrados: n^2 más o menos una constante.

Regla

Para patrones con figuras (palillos, cuadrados, baldosas) se cuenta cuántos elementos hay en cada figura, se escribe la sucesión de números y se busca su fórmula. Por ejemplo, con triángulos formados con palillos se tienen 3, 5, 7, ... palillos: $a_n = 2n + 1$.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 2

Término general de $7, 12, 17, 22, \ldots$ Diferencia: 5. $a_n = 7 + (n-1)\cdot 5 = 5n + 2$. Comprobación: $a_1 = 7$, $a_2 = 12$.

Ejemplo 3

Suma de los 15 primeros términos de $3, 7, 11, \ldots$ Aquí $d = 4$, $a_{15} = 3 + 14 \cdot 4 = 59$ y $S_{15} = \frac{(3+59)\cdot 15}{2} = 465$.

Ejemplo 4

Un cultivo se duplica cada hora y empieza con 100 bacterias.

Después de 5 horas hay $100 \cdot 2^5 = 3\,200$. Es una progresión geométrica de razón 2.

Progresiones en la vida real

Observación

Las progresiones aritméticas aparecen cuando algo crece o decrece en una cantidad fija: un ahorro semanal que sube 2 € cada semana, las filas de un teatro con dos butacas más que la anterior o un entrenamiento en el que se corre medio kilómetro más cada día. Las progresiones geométricas aparecen cuando algo se multiplica por un factor fijo: una población de bacterias que se duplica cada hora, el capital con interés compuesto (cada año se multiplica por $1 + r$) o el rebote de una pelota que sube cada vez la mitad de la altura anterior.

Observación

La diferencia entre ambos tipos es muy visible a largo plazo. Con una progresión aritmética de diferencia 2, el término 20 es 41 si se empieza en 3. Con una geométrica de razón 2, el término 20 que empieza en 3 supera los 1,5 millones. Por eso se dice que el crecimiento geométrico (o exponencial) es mucho más rápido que el lineal.

Sucesiones de figuras

Observación

En muchos problemas las sucesiones aparecen en forma de dibujos: una torre de cubos, una fila de cuadrados hechos con cerillas o una escalera de baldosas. El procedimiento es siempre el mismo: se cuentan los elementos de las primeras tres o cuatro figuras, se escribe la sucesión numérica, se halla la regla (diferencias constantes, cocientes constantes o cuadrados) y se comprueba con la figura siguiente. Con la fórmula se puede responder sin dibujar: ¿cuántos palillos hacen falta para 50 triángulos? ¿En qué figura habrá exactamente 100 puntos? Esta última pregunta se resuelve igualando la fórmula a 100 y comprobando que n sale entero y positivo.

- Usar $a_n = a_1 + n \cdot d$ en lugar de $a_1 + (n-1)d$.
- Confundir diferencia (se suma) con razón (se multiplica).
- Olvidar que el primer término corresponde a $n = 1$, no a $n = 0$.
- Aplicar la fórmula de la suma sin calcular antes el último término.
- Dar un término general que no verifica los primeros términos: siempre hay que comprobarlo con $n = 1, 2, 3$.

Aritméticas frente a geométricas

Propiedad: reconocer el tipo de progresión

Si la diferencia $a_{n+1} - a_n$ es siempre la misma, la sucesión es una progresión aritmética. Si el cociente $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ es siempre el mismo, es una progresión geométrica. En una aritmética los términos crecen o decrecen de forma lineal; en una geométrica con $r > 1$ crecen cada vez más deprisa y con 0 se acercan a cero.

Ejemplo 5

Decide si $3,\ 6,\ 12,\ 24,\ \ldots$ y $3,\ 6,\ 9,\ 12,\ \ldots$ son aritméticas o geométricas.

La primera: cocientes $\dfrac{6}{3} = \dfrac{12}{6} = \dfrac{24}{12} = 2$, geométrica de razón 2. La segunda: diferencias $6 - 3 = 9 - 6 = 12 - 9 = 3$, aritmética de diferencia 3. Observa que empiezan igual y se separan muy deprisa: el décimo término de la primera es $3 \cdot 2^9 = 1\,536$ y el de la segunda es 30.

Cómo encontrar el término general

Método: hallar el término general

1. Calcula las diferencias entre términos consecutivos; si son constantes, la sucesión es aritmética con $a_n = a_1 + (n-1)d$.
2. Si no, calcula los cocientes; si son constantes, es geométrica con $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$.
3. Si ninguna de las dos funciona, busca una relación con n (cuadrados, sumas de los anteriores...).
4. Comprueba la fórmula calculando los primeros términos.

Ejemplo 6

Halla el término general de $7,\ 10,\ 13,\ 16,\ \ldots$ y calcula el término 50.

Las diferencias son 3: aritmética con $a_1 = 7$ y $d = 3$. $a_n = 7 + 3(n-1) = 3n + 4$. Comprobación: $a_3 = 13$. El término 50 es $a_{50} = 3 \cdot 50 + 4 = 154$.

Observación: sucesiones en la vida diaria

Cuando alguien ahorra una cantidad fija cada semana, el dinero acumulado forma una progresión aritmética. Cuando una cuenta de ahorro paga un interés porcentual cada año, el capital forma una progresión geométrica. También son geométricas la desintegración de los materiales radiactivos, el reparto de rumores o la propagación de una noticia en las redes. Reconocer el tipo de sucesión permite elegir la fórmula adecuada y hacer predicciones razonables, por ejemplo cuántos meses hacen falta

para reunir el dinero de un viaje de fin de curso o cuántas rondas tiene un torneo.

- Escribir $a_n = a_1 + nd$ en vez de $a_1 + (n-1)d$: el primer término no tiene saltos.
- Confundir el término a_n con la suma S_n de los n primeros.
- Calcular r^n en lugar de r^{n-1} en la fórmula geométrica.
- Buscar el patrón con solo dos términos: hacen falta tres o cuatro para estar seguros.

¿Sabías que?

La sucesión de Fibonacci, $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$, lleva el nombre del matemático italiano Leonardo de Pisa, que la presentó en 1202 en un problema sobre la cría de conejos. Aparece en la disposición de las semillas del girasol, en las espirales de las piñas y en las conchas de algunos caracoles. Sus cocientes se acercan al número áureo, $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$.

¡Atención!

En la fórmula $a_n = a_1 + (n-1)d$ el número de saltos desde el primer término es $n-1$, no n: para llegar al término 10 desde el primero se dan 9 saltos. Lo mismo ocurre en las progresiones geométricas, donde la razón se multiplica $n-1$ veces. Antes de usar una fórmula, comprueba con los primeros términos que da los valores correctos.

El consejo de Otto

Para comprobar un término general, sustituye $n = 1$, $n = 2$ y $n = 3$: si no te salen los tres primeros términos de la sucesión, la fórmula está mal.