Soluciones - Patrones y sucesiones

Curso: 3 Eso

Solución del ejercicio 1

a. Cada término es el anterior más 4 (progresión aritmética): $19,\ 23,\ 27$.
b. Cada término es el anterior por 3 (progresión geométrica): $162,\ 486,\ 1\,458$.
c. Son los cuadrados perfectos $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots$: $25,\ 36,\ 49$.
d. Cada término es la suma de los dos anteriores (sucesión de Fibonacci): $13,\ 21,\ 34$.

Solución del ejercicio 2

a. $a_1 = 3$, $a_2 = 8$, $a_3 = 13$, $a_4 = 18$, $a_5 = 23$. Sustituimos $n = 1, 2, 3, 4, 5$ en la fórmula.
b. $a_{10} = 5 \cdot 10 - 2 = 48$. Sustituimos $n = 10$.
c. $5n - 2 = 98$, $5n = 100$, $n = 20$: sí es el término 20. $5n - 2 = 100$ da $n = 20{,}4$, que no es entero: no es término. Un término de la sucesión debe tener una posición n natural.
d. Es una progresión aritmética de diferencia $d = 5$ y primer término $a_1 = 3$. Cada término se obtiene sumando 5 al anterior.

Solución del ejercicio 3

a. $4,\ 7,\ 10,\ 13,\ 16$. Empezamos en 4 y sumamos 3 cada vez.
b. $a_{10} = 4 + 9 \cdot 3 = 31$ y $a_{20} = 4 + 19 \cdot 3 = 61$. Del primero al décimo hay 9 saltos de 3, y al vigésimo 19 saltos.
c. $S_{10} = \dfrac{(4 + 31) \cdot 10}{2} = 175$. Aplicamos la fórmula con el primer y el último término. Comprobación: $4 + 7 + \cdots + 31$ son 10 términos cuya media es 17,5, y $17{,}5 \cdot 10 = 175$.
d. $a_n = 4 + 3(n - 1) = 3n + 1$. Quitamos el paréntesis y agrupamos. Comprobación: $3 \cdot 1 + 1 = 4$.

Solución del ejercicio 4

a. $a_7 - a_3 = 4d$, es decir, $12 = 4d$ y $d = 3$. Entre el tercer y el séptimo término hay 4 diferencias.
b. $a_3 = a_1 + 2d$, así que $11 = a_1 + 6$ y $a_1 = 5$. Del primero al tercero hay 2 saltos de 3.
c. $a_n = 5 + 3(n - 1) = 3n + 2$. Comprobación: $a_3 = 3 \cdot 3 + 2 = 11$ y

$a_7 = 3 \cdot 7 + 2 = 23$.

d. $a_{10} = 3 \cdot 10 + 2 = 32$. Sustituimos $n = 10$ en el término general. Respuesta: $a_{10} = 32$.

Solución del ejercicio 5

a. $S_{100} = \dfrac{(1 + 100) \cdot 100}{2} = 5\,050$. El primero más el último dan 101, y hay 100 términos.

b. Hay $\dfrac{100}{5} = 20$ términos: $S_{20} = \dfrac{(5 + 100) \cdot 20}{2} = 1\,050$. Contamos los términos dividiendo el último entre 5.

c. Hay 25 términos: $S_{25} = \dfrac{(2 + 50) \cdot 25}{2} = 650$. De 2 a 50 de dos en dos hay 25 números pares.

d. $1 + 100 = 101$, $2 + 99 = 101$, \dots Hay 50 parejas: $50 \cdot 101 = 5\,050$.

Solución del ejercicio 6

a. $3,\ 6,\ 12,\ 24,\ 48$. Empezamos en 3 y multiplicamos por 2 cada vez.

b. $a_5 = 3 \cdot 2^4 = 48$ y $a_8 = 3 \cdot 2^7 = 384$. La razón se multiplica $n - 1$ veces: $2^4 = 16$ y $2^7 = 128$.

c. $S_6 = \dfrac{3(2^6 - 1)}{2 - 1} = 3 \cdot 63 = 189$. Comprobación: $3 + 6 + 12 + 24 + 48 + 96 = 189$.

d. Se duplica 7 veces (la razón se multiplica $n - 1 = 7$ veces). Respuesta: se duplica 7 veces.

Solución del ejercicio 7

a. $80,\ 40,\ 20,\ 10$. Cada término es la mitad del anterior. Respuesta: 80, 40, 20 y 10.

b. $a_4 = 80 \cdot \dfrac{1}{8} = 10$ y $a_6 = 80 \cdot \dfrac{1}{32} = 2{,}5$. Aplicamos $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$: $r^3 = \dfrac{1}{8}$ y $r^5 = \dfrac{1}{32}$. Respuesta: $a_4 = 10$ y $a_6 = 2{,}5$.

c. $S_4 = \dfrac{80\left(1 - \frac{1}{16}\right)}{\frac{1}{2}} = \dfrac{80 \cdot \frac{15}{16}}{\frac{1}{2}} = 150$. Como la razón es menor que 1, usamos la fórmula con $1 - r^n$ para trabajar con números positivos. Respuesta: $S_4 = 150$.

d. $80 + 40 + 20 + 10 = 150$. La suma directa coincide con la fórmula, así que el resultado es correcto.

Solución del ejercicio 8

a. Aritmética con $a_1 = 5$ y $d = 3$: $a_n = 3n + 2$. $a_{10} = 32$. La diferencia entre términos consecutivos es constante, 3.
b. Geométrica con $a_1 = 2$ y $r = 2$: $a_n = 2^n$. $a_{10} = 1\,024$. Cada término es el doble del anterior.
c. Los números impares: $a_n = 2n - 1$. $a_{10} = 19$. Cada impar es un par menos uno.
d. Aritmética con $a_1 = 6$ y $d = 5$: $a_n = 5n + 1$. $a_{10} = 51$. Comprobación: $a_1 = 6$.

Solución del ejercicio 9

a. Con 4 cuadrados: $4 + 3 + 3 + 3 = 13$ palillos. Cada cuadrado nuevo comparte un lado con el anterior, por eso solo añade 3 palillos.
b. Cada cuadrado nuevo añade 3 palillos: $a_n = 4 + 3(n - 1) = 3n + 1$. Es una progresión aritmética con $a_1 = 4$ y $d = 3$.
c. $a_{10} = 3 \cdot 10 + 1 = 31$ palillos. Sustituimos $n = 10$ en el término general. Respuesta: 31 palillos.
d. $3n + 1 = 100$, $n = 33$ cuadrados (usa exactamente 100 palillos). Igualamos el término general a 100 y despejamos. Respuesta: 33 cuadrados.

Solución del ejercicio 10

a. $a_n = 10 + 5(n - 1) = 5n + 5$. Es una progresión aritmética con $a_1 = 10$ y $d = 5$.
b. $a_{12} = 5 \cdot 12 + 5 = 65$ €. Sustituimos $n = 12$.
c. $S_{12} = \dfrac{(10 + 65) \cdot 12}{2} = 450$ €. Usamos la fórmula de la suma con el primer y el último término.
d. $5n + 5 > 100$, $n > 19$: en la semana 20 ahorra 105 €. Comprobación: en la semana 19 ahorra exactamente 100 €. Respuesta: en la semana 20.

Solución del ejercicio 11

a. $a_{20} = 12 + 19 \cdot 2 = 50$ butacas. Es aritmética con $a_1 = 12$ y $d = 2$; del primero al vigésimo hay 19 saltos.
b. $S_{20} = \dfrac{(12 + 50) \cdot 20}{2} = 620$ butacas. Sumamos las 20 filas con la fórmula de Gauss.
c. $620 \cdot 15 = 9\,300$ €. Multiplicamos el número de butacas por el precio.
d. $S_n = \dfrac{(2 \cdot 12 + (n - 1)2)\, n}{2} = n(11 + n) = 900$, es decir, $n^2 + 11n - 900 = 0$; $n = \dfrac{-11 + \sqrt{3\,721}}{2} = \dfrac{-11 + 61}{2} = 25$ filas. Comprobación: $25 \cdot 36 = 900$.

Respuesta: 25 filas.

Solución del ejercicio 12

a. $a_n = 500 \cdot 2^n$. Cada hora se multiplica por 2.
b. $a_6 = 500 \cdot 64 = 32\,000$. $2^6 = 64$.
c. $500 \cdot 2^4 = 8\,000$ y $500 \cdot 2^5 = 16\,000$. Superan las 10 000 a las 5 horas. Probamos valores de n hasta superar 10 000.
d. Geométrica de razón $r = 2$. El cociente entre términos consecutivos es constante, 2.

Solución del ejercicio 13

a. Por $1 - 0{,}20 = 0{,}8$. Perder el 20 % es conservar el 80 %.
b. $V_n = 600 \cdot 0{,}8^n$. Cada año se multiplica por 0,8.
c. $V_3 = 600 \cdot 0{,}512 = 307{,}20$ €. $0{,}8^3 = 0{,}512$.
d. $V_4 \approx 245{,}76$ €, $V_5 \approx 196{,}61$ €. Valdrá menos de 200 € al cabo de 5 años. Calculamos los valores año a año hasta bajar de 200 €.

Solución del ejercicio 14

a. La fila n tiene n latas: la décima, 10. Es la progresión aritmética de los números naturales.
b. $S_{10} = \dfrac{(1+10)\cdot 10}{2} = 55$ latas. Sumamos los números del 1 al 10 con la fórmula de Gauss.
c. $S_{21} = \dfrac{(1+21)\cdot 21}{2} = 231$ latas. Aplicamos la misma fórmula con 21 términos.
d. $S_{15} = 120$: 15 filas, justo con 120 latas. Comprobación: $\dfrac{16 \cdot 15}{2} = 120$. Respuesta: 15 filas completas.

Solución del ejercicio 15

a. Opción 1 (aritmética): $a_n = 1\,200 + 50(n-1)$. Opción 2 (geométrica): $b_n = 1\,200 \cdot 1{,}03^{n-1}$.
b. $a_{10} = 1\,200 + 450 = 1\,650$ €. $b_{10} = 1\,200 \cdot 1{,}03^9 \approx 1\,565{,}73$ €.
c. $S = \dfrac{(1\,200 + 1\,650)\cdot 10}{2} = 14\,250$ € (suma de los sueldos mensuales de cada año).

d. $S = \dfrac{1\,200(1{,}03^{10} - 1)}{0{,}03} \approx 13\,756{,}65$ €. La subida de 50 € da $493{,}35$ € más en 10 años; con muchos más años ganaría la subida del 3 %.

Solución del ejercicio 16

a. $2 \cdot 0{,}75 = 1{,}5$ m; $1{,}5 \cdot 0{,}75 = 1{,}125$ m; $1{,}125 \cdot 0{,}75 = 0{,}84375$ m. Cada altura es los tres cuartos de la anterior.
b. Geométrica de razón $0{,}75$: $h_n = 2 \cdot 0{,}75^n$. La altura del bote n es la inicial multiplicada n veces por 0,75.
c. $h_5 = 2 \cdot 0{,}75^5 \approx 0{,}475$ m. $0{,}75^5 \approx 0{,}237$.
d. $1{,}5 + 1{,}125 + 0{,}84375 = 3{,}46875$ m. Respuesta: unos 3,47 m.

Solución del ejercicio 17

a. Ronda 1: 32 partidos; ronda 2: 16; ronda 3: 8; ronda 4: 4; ronda 5: 2; ronda 6: 1 (la final). Es geométrica de razón $\dfrac{1}{2}$.
b. 6 rondas (porque $2^6 = 64$).
c. $32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 63$ partidos.
d. Cada partido elimina a un jugador y hay que eliminar a 63 para que quede el campeón: 63 partidos.

Solución del ejercicio 18

a. El marco de un cuadrado 2×2 es de $4 \times 4 = 16$ menos $4 = 12$ baldosas. Contamos el cuadrado grande de 4×4 y quitamos las 4 blancas del centro.
b. Cada aumento de 1 en el lado añade 4 baldosas: $a_n = 8 + 4(n - 1) = 4n + 4$. Es una progresión aritmética de diferencia 4.
c. $a_{10} = 4 \cdot 10 + 4 = 44$ baldosas. Sustituimos $n = 10$.
d. $4n + 4 = 100$, $n = 24$: un cuadrado de 24×24. Respuesta: un cuadrado de 24 baldosas de lado.

Solución del ejercicio 19

a. $1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55$.
b. $1{,}6;\ 1{,}625;\ 1{,}615;\ 1{,}619;\ \ldots$ Las razones se acercan a un mismo valor.
c. $\dfrac{55}{34} \approx 1{,}618$, casi el número áureo $\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$.
d. Ni una ni otra: las diferencias (0, 1, 1, 2, 3, \dots) no son constantes y las razones tampoco.

Solución del ejercicio 20

a. Sean $x-d$, x y $x+d$: la suma es $3x=21$, $x=7$. Producto: $7(49-d^2)=315$, $49-d^2=45$, $d=\pm 2$. Los números son $5,\ 7,\ 9$ (o $9,\ 7,\ 5$).

b. Si x es el término medio, $\dfrac{x}{2}=\dfrac{18}{x}$, $x^2=36$, $x=6$ (razón 3) o $x=-6$ (razón -3).

c. $102=7+5(n-1)$, $95=5(n-1)$, $n=20$ términos.

d. $a_1=1$, $r=\dfrac{1}{2}$: $S=\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$.