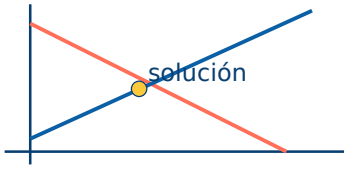
Apuntes - Sistemas de ecuaciones

Curso: 3 Eso

En este tema aprenderás: ecuaciones lineales con dos incógnitas, sistemas de ecuaciones lineales, método de sustitución, método de igualación, método de reducción, resolución de problemas con sistemas y sistemas con paréntesis y fracciones. Cada idea va en un cuadro de color, con ejemplos resueltos paso a paso.

Actividad de introducción: el misterio de los precios

Marta compra 2 bocadillos y 1 refresco en una cafetería de Zaragoza y paga 7 €. Su amigo Pablo compra 1 bocadillo y 1 refresco y paga 4,50 €. ¿Cuánto cuesta cada cosa? Con una sola compra no se puede saber, porque hay muchos precios posibles: la compra de Marta se cumple con bocadillo a 3 € y refresco a 1 €, pero también con bocadillo a 2 € y refresco a 3 €. Cuando se conocen las dos compras, solo un par de precios cumple las dos condiciones a la vez. Si se restan las dos cuentas, aparece que el segundo bocadillo cuesta $7 - 4{,}5 = 2{,}50$ € y el refresco, entonces, 2 €. Esa idea, combinar dos ecuaciones con dos incógnitas, es el origen de los sistemas de ecuaciones, que se resuelven por sustitución, igualación o reducción, o gráficamente con dos rectas.



Ecuaciones lineales con dos incógnitas

Propiedad

Una ecuación lineal con dos incógnitas tiene la forma $ax + by = c$. Tiene infinitas soluciones: cada una es una pareja (x, y). Por ejemplo, $x + y = 5$ se cumple con $(0, 5)$, $(1, 4)$, $(2, 3)$, etc. Si se representan todas las soluciones en unos ejes de coordenadas, forman una **recta**.

Sistemas de ecuaciones lineales

Definición: sistema

Un **sistema** de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es un conjunto de dos ecuaciones que deben cumplirse a la vez:

Propiedad

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Definición: solución

Una **solución** es una pareja (x, y) que verifica las dos ecuaciones. Gráficamente, es el punto donde se cortan las dos rectas. Según su número de soluciones, el sistema puede ser:

- **Compatible determinado:** una única solución (las rectas se cortan en un punto).
- **Compatible indeterminado:** infinitas soluciones (las rectas coinciden).
- **Incompatible:** ninguna solución (las rectas son paralelas distintas).

Regla

Si $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, el sistema es compatible determinado. Si $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, es indeterminado. Si $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, es incompatible.

Método de sustitución

Método: método de sustitución

1. Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones.
2. Se sustituye esa expresión en la otra ecuación, que queda con una sola incógnita.
3. Se resuelve y se calcula la otra incógnita.
4. Se comprueba en las dos ecuaciones.

Ejemplo 1

$y = 2x - 1$ **y** $x + y = 8$**.**

Sustituyendo: $x + 2x - 1 = 8$, $3x = 9$, $x = 3$ e $y = 5$.

Método de igualación

Observación

Se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones y se igualan las expresiones. Ejemplo: $y = 3x - 2$ e $y = x + 4$. Igualando: $3x - 2 = x + 4$, $2x = 6$, $x = 3$ e $y = 7$.

Método de reducción

Observación

Se multiplican las ecuaciones por números adecuados para que una incógnita tenga coeficientes opuestos y, al sumar, desaparezca. Ejemplo: $2x + 3y = 12$ y $4x - 3y = 6$. Sumando miembro a miembro: $6x = 18$, $x = 3$. Entonces $6 + 3y = 12$ y $y = 2$. Si los coeficientes no son opuestos, se multiplican las ecuaciones. En $3x + 2y = 13$ y $2x - y = 4$, se multiplica la segunda por 2: $4x - 2y = 8$. Sumando: $7x = 21$, $x = 3$, $y = 2$.

Observación

Los tres métodos dan la misma solución. La sustitución es cómoda cuando una incógnita tiene coeficiente 1; la reducción, cuando los coeficientes son parecidos; y la igualación, cuando las dos ecuaciones ya vienen despejadas.

Resolución de problemas con sistemas

Regla

Para resolver un problema con dos incógnitas: (1) identifica las dos cantidades que no conoces y llámalas x e y; (2) traduce cada condición del enunciado a una ecuación; (3) resuelve el sistema con el método que prefieras; (4) comprueba la solución en el enunciado y responde con unidades.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 2

Dos números suman 45 y su diferencia es 11.

$x + y = 45$, $x - y = 11$. Sumando: $2x = 56$, $x = 28$ e $y = 17$.

Ejemplo 3

En un teatro, 3 entradas de adulto y 2 de niño cuestan 23 €, y 2 de adulto y 3 de niño cuestan 22 €.

Sean a y n los precios: $3a + 2n = 23$ y $2a + 3n = 22$. Multiplicando por 3 y por 2: $9a + 6n = 69$ y $4a + 6n = 44$. Restando: $5a = 25$, $a = 5$ y $n = 4$. La entrada de adulto cuesta 5 € y la de niño, 4 €.

Ejemplo 4

$x + y = 3$ **y** $2x + 2y = 8$**.**

Multiplicando la primera por 2: $2x + 2y = 6 \neq 8$. Es un sistema incompatible, sin solución: son rectas paralelas.

Sistemas con paréntesis y fracciones

Observación

A veces el sistema no viene en la forma $ax + by = c$. Antes de resolver hay que prepararlo: se quitan paréntesis, se eliminan denominadores multiplicando cada ecuación por el mínimo común múltiplo de sus denominadores y se reducen términos semejantes hasta obtener dos ecuaciones lineales ordenadas. Por ejemplo, $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 4$ equivale a $3x + 2y = 24$, y $2(x + 1) - y = 5$ equivale a $2x - y = 3$. Este paso previo evita muchos errores y permite aplicar cualquiera de los tres métodos.

Observación

Comprobar la solución es fundamental: sustituye x e y en las ecuaciones *originales* del enunciado, no en las ya transformadas, para detectar también los errores cometidos al prepararlas. En los problemas, interpreta además el resultado: unos precios, edades o longitudes negativos indican que algo se ha planteado mal. Representar las dos rectas con una tabla de valores es una buena forma de visualizar el sistema y de verificar que el punto de corte coincide con la solución algebraica.

- Multiplicar solo un miembro de la ecuación al buscar coeficientes opuestos.
- Olvidar cambiar el signo al restar ecuaciones.
- Dar solo el valor de x y olvidar calcular y.
- No comprobar la solución en las dos ecuaciones.
- Plantear mal el problema (por ejemplo, confundir «el triple de» con «tres más que»).

Qué método elegir

Propiedad: criterios para elegir el método

- **Sustitución**: conviene cuando alguna incógnita ya está despejada o tiene coeficiente 1.
- **Igualación**: conviene cuando las dos ecuaciones tienen la misma incógnita despejada, por ejemplo $y = \ldots$ en las dos.
- **Reducción**: conviene cuando los coeficientes son parecidos o es fácil igualarlos multiplicando.
- **Gráfico**: da una idea visual de la solución, pero solo es exacto si los puntos de corte tienen coordenadas sencillas.

Ejemplo 5

Resuelve $\begin{cases} 4x - 3y = 5 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$ eligiendo el método más cómodo.

La y de la segunda ecuación tiene coeficiente 1, así que se despeja: $y = 5 - 2x$. Sustituimos: $4x - 3(5 - 2x) = 5$, $4x - 15 + 6x = 5$, $10x = 20$ y $x = 2$. Entonces $y = 5 - 4 = 1$. Comprobación: $8 - 3 = 5$ y $4 + 1 = 5$.

Problemas con sistemas

Método: plantear un problema con dos incógnitas

1. Lee el enunciado y decide qué representan x e y, con sus unidades.
2. Escribe una ecuación por cada condición del enunciado.
3. Resuelve el sistema con el método más cómodo.
4. Comprueba las dos ecuaciones y responde con una frase que incluya las unidades.

Ejemplo 6

Entre dos amigos reúnen 30 € y uno tiene 6 € más que el otro. ¿Cuánto tiene cada uno?

Sean x el que más tiene e y el otro: $x + y = 30$ y $x - y = 6$. Sumando: $2x = 36$, $x = 18$ e $y = 12$. Comprobación: $18 + 12 = 30$ y $18 - 12 = 6$.

- Multiplicar solo un término de la ecuación al buscar coeficientes opuestos: hay que multiplicar los dos miembros completos.
- Sustituir el valor encontrado en la misma ecuación de la que se despejó y no comprobar en la otra.
- Dar solo el valor de x y olvidarse de y: la solución es un par.
- Cambiar mal los signos al restar dos ecuaciones.

¿Sabías que?

Los matemáticos chinos resolvían sistemas de ecuaciones hace más de 2 000 años, en el libro «Los nueve capítulos sobre el arte matemático». Usaban tablas de números muy parecidas a las matrices actuales. Hoy los sistemas de ecuaciones se utilizan para calcular las rutas de los GPS, las tarifas de las compañías y la distribución de la electricidad.

Tipos de sistemas y su interpretación gráfica

Propiedad: número de soluciones

Cada ecuación lineal con dos incógnitas se representa con una recta, y las soluciones del sistema son los puntos comunes a las dos rectas. Por eso solo hay tres posibilidades. Si las rectas se cortan en un punto, el sistema tiene una única solución y se llama compatible determinado. Si las rectas son paralelas, no tienen ningún punto común y el sistema es incompatible: no tiene solución. Si las dos ecuaciones representan la misma recta, todos sus puntos son soluciones y el sistema es compatible indeterminado, con infinitas soluciones.

Ejemplo 7

Clasifica el sistema formado por $2x - y = 3$ y $4x - 2y = 5$.

Si multiplicamos la primera ecuación por 2 obtenemos $4x - 2y = 6$. Pero la segunda ecuación dice que esa misma expresión vale 5. Es imposible que $4x - 2y$ valga a la vez 6 y 5, así que el sistema no tiene solución: es incompatible. Gráficamente, las dos rectas tienen la misma pendiente, 2, pero distinta ordenada en el origen, de modo que son paralelas y nunca se cortan.

¡Atención!

Cuando resuelvas un sistema, comprueba siempre la solución en las dos ecuaciones originales, no solo en la que has usado al final. Un error de signo al despejar se detecta enseguida con esta comprobación. En los problemas, revisa también que la solución tenga sentido: un número de personas o de monedas no puede ser negativo ni decimal.

El consejo de Otto

Antes de resolver, dibuja mentalmente las dos rectas: si las dos ecuaciones son «proporcionales» entre sí, el sistema es indeterminado o incompatible, y ahorrarás tiempo.