Apuntes - Proporcionalidad y educación financiera

Curso: 3 Eso

En este tema aprenderás: razón y proporción, regla de tres simple, regla de tres compuesta, porcentajes y educación financiera: ahorro, interés y préstamos. Cada idea va en un cuadro de color, con ejemplos resueltos paso a paso.

Actividad de introducción: ¿qué oferta es mejor?

En un supermercado de Granada, un paquete de 6 yogures cuesta 2,40 € y otro de 10 yogures iguales cuesta 3,50 €. ¿Cuál conviene más? Para decidir hay que comparar precios por unidad: $\frac{2{,}40}{6} = 0{,}40$ € el yogur en el primero y $\frac{3{,}50}{10} = 0{,}35$ € en el segundo, así que el segundo es más barato. Este razonamiento usa la proporcionalidad: la relación entre el número de yogures y el precio es constante. Otras veces el precio sube, se aplica un descuento o un banco paga intereses por guardar dinero; entonces aparecen los porcentajes. En este tema estudiarás la proporcionalidad directa e inversa, las reglas de tres simples y compuestas, los porcentajes y los fundamentos de la educación financiera: ahorro, interés simple, interés compuesto y préstamos. Saber estos conceptos ayuda a tomar decisiones de consumo informadas.



Razón y proporción

Definición: razón

Una **razón** es el cociente entre dos cantidades, $\frac{a}{b}$. Una **proporción** es la igualdad de dos razones: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, y en ella se cumple que $a \cdot d = b \cdot c$ (producto de extremos igual a producto de medios). Dos magnitudes son **directamente proporcionales** si al multiplicar una por un número la otra queda multiplicada por el mismo número; el cociente $k = \frac{y}{x}$ es constante y se llama **constante de proporcionalidad**. Son **inversamente proporcionales** si al multiplicar una por un número la otra queda dividida por él; ahora es constante el producto $x \cdot y = k$.

Regla de tres simple

Propiedad: regla de tres simple

- **Directa:** si 5 kg de manzanas cuestan 7,50 €, 8 kg cuestan $x = \frac{8 \cdot 7{,}5}{5} = 12$ €.
- **Inversa:** si 6 obreros tardan 12 días, 9 obreros tardan $x = \frac{6 \cdot 12}{9} = 8$ días.

Antes de aplicarla hay que preguntarse: «si una magnitud aumenta, ¿la otra aumenta (directa) o disminuye (inversa)?».

Cómo se hace: resolver una regla de tres

1. Escribe las magnitudes en una tabla con la incógnita x.
2. Decide si la proporcionalidad es directa (si una sube, la otra sube) o inversa (si una sube, la otra baja).
3. Directa: producto cruzado, $x = \frac{b \cdot c}{a}$. Inversa: productos en línea, $x = \frac{a \cdot b}{c}$.
4. Comprueba que el resultado es razonable y escribe las unidades.

Regla de tres compuesta

Observación

Intervienen más de dos magnitudes. Se estudia cada una con la magnitud incógnita y se combinan las razones. Un método fiable consiste en calcular «cuánto trabajo» se hace por unidad: por ejemplo, si el trabajo depende de obreros, días y horas diarias, el producto $\text{obreros} \cdot \text{días} \cdot \text{horas}$ es proporcional al trabajo realizado. Así, 4 obreros durante 6 días con 8 horas diarias suman $4 \cdot 6 \cdot 8 = 192$ «horas de obrero» y hacen 96 m^2 de muro, es decir, 2 horas de obrero por metro cuadrado.

Porcentajes

Propiedad: porcentajes

El $p\,\%$ de una cantidad C es $\frac{p}{100} \cdot C$. Para pasar de un porcentaje a un cálculo se usa el **índice de variación**:

- Aumento del $p\,\%$: se multiplica por $1 + \frac{p}{100}$. Un aumento del 15 % equivale a multiplicar por 1,15.
- Disminución del $p\,\%$: se multiplica por $1 - \frac{p}{100}$. Un descuento del 20 % equivale a multiplicar por 0,80.
- Variaciones sucesivas: se multiplican los índices. Un 20 % de descuento seguido de otro 10 % da $0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}72$, es decir, un descuento total del 28 %, no del 30 %.
- Para hallar el valor original: se divide entre el índice. Si tras un 30 % de rebaja un objeto cuesta 56 €, el precio original es $\frac{56}{0{,}7} = 80$ €.

Definición: IVA

El **IVA** es un impuesto sobre el consumo que se añade al precio: con el tipo general del 21 %, un producto de 150 € sin IVA cuesta $150 \cdot 1{,}21 = 181{,}50$ €.

Cómo se hace: calcular aumentos y descuentos

1. Aumento del $p\,\%$: multiplica por $1 + \frac{p}{100}$.
2. Descuento del $p\,\%$: multiplica por $1 - \frac{p}{100}$.
3. Para deshacer el cambio, divide entre ese mismo factor.
4. Ejemplo: un abrigo de 80 € con un 25 % de descuento cuesta $80 \cdot 0{,}75 = 60$ €.

Educación financiera: ahorro, interés y préstamos

Propiedad: educación financiera: ahorro, interés y préstamos

Cuando se deposita o se pide prestado un **capital** C durante t años a un **tipo de interés anual** r (en tanto por uno), existen dos modelos:

- **Interés simple:** los intereses se calculan siempre sobre el capital inicial. $I = C \cdot r \cdot t$ y el capital final es $C_f = C(1 + rt)$.
- **Interés compuesto:** los intereses de cada año se suman al capital y producen nuevos intereses. $C_f = C(1 + r)^t$.

Observación

Con 5 000 € al 4 % durante 3 años, el interés compuesto da $5000 \cdot 1{,}04^3 = 5\,624{,}32$ €, mientras que el simple daría $5000 \cdot (1 + 0{,}04 \cdot 3) = 5\,600$ €. La diferencia crece con el tiempo.

Observación

La educación financiera también enseña a elaborar un **presupuesto**: se anotan los ingresos y los gastos fijos (alquiler, suministros) y variables (ocio, ropa) y se decide qué porcentaje se ahorra. Conviene comparar siempre el coste total de un préstamo, no solo la cuota mensual, y desconfiar de ofertas que parecen muy atractivas pero ocultan comisiones.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 1

Una cazadora de 80 € sube un 15 % y luego baja un 15 %.

Precio final: $80 \cdot 1{,}15 \cdot 0{,}85 = 78{,}20$ €. No vuelve a valer 80 €, porque cada porcentaje se aplica sobre una cantidad distinta.

Ejemplo 2

Repartir 840 € de forma directamente proporcional a 2, 3 y 5. La suma de partes es 10 y cada parte vale $840 : 10 = 84$ €. Resultan 168 €, 252 € y 420 €.

Ejemplo 3

¿Qué tanto por ciento es 18 de 72? $\frac{18}{72} = 0{,}25 = 25\,\%$.

- Aplicar una regla de tres directa cuando la relación es inversa.
- Sumar porcentajes sucesivos en lugar de multiplicar los índices de variación.
- Calcular un descuento sobre el precio final en lugar de sobre el original.
- Confundir el interés simple con el compuesto.
- Olvidar pasar el porcentaje a decimal (5 % es 0,05).

Más sobre el dinero: ahorro y préstamos

Método: decidir entre dos ofertas

1. Reduce las dos ofertas a la misma unidad (precio por unidad, por kilo, por mes).
2. Aplica los índices de variación: multiplica por $1 + \frac{p}{100}$ para un aumento y por $1 - \frac{p}{100}$ para una rebaja.
3. Compara los resultados finales, no solo los porcentajes anunciados.
4. Si hay pagos aplazados, suma los intereses y comprueba el total pagado.

Ejemplo 4

Dos tiendas venden la misma bicicleta de 300 €. La tienda A hace un 20 % de descuento y la B un 15 % y después un 5 % adicional. ¿Cuál es más barata?

Tienda A: $300 \cdot 0{,}80 = 240$ €. Tienda B: $300 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}95 = 242{,}25$ €. Es más barata la tienda A, porque dos descuentos sucesivos no se suman.

Interés simple frente a interés compuesto

Propiedad: dos formas de ganar intereses

En el interés simple, los intereses se calculan siempre sobre el capital inicial: $C_t = C \cdot (1 + r \cdot t)$. En el interés compuesto, los intereses de cada año se suman al capital y producen nuevos intereses: $C_t = C \cdot (1 + r)^t$. A corto plazo las diferencias son pequeñas, pero a largo plazo el compuesto crece mucho más. Por eso conviene

empezar a ahorrar pronto y no gastar los intereses.

Ejemplo 5

Compara el capital final de 1 000 € a 10 años con un 4 % de interés simple y compuesto.

Simple: $1\,000 \cdot (1 + 0{,}04 \cdot 10) = 1\,400$ €. Compuesto: $1\,000 \cdot 1{,}04^{10} \approx 1\,480{,}24$ €. El compuesto da $80{,}24$ € más.

- Sumar descuentos sucesivos: un 20 % y un 10 % no equivalen a un 30 %.
- Usar una regla de tres directa cuando las magnitudes son inversamente proporcionales.
- Calcular un porcentaje sobre la cantidad equivocada: el 10 % que se resta después de una subida se calcula sobre el nuevo precio.
- Olvidar que en el interés compuesto el exponente es el número de períodos.

¿Sabías que?

El interés compuesto se llama a veces «la octava maravilla del mundo» porque convierte pequeños ahorros en grandes cantidades con el paso del tiempo. Los bancos centrales y las familias lo usan para calcular hipotecas y planes de pensiones. En España, el IVA general es del 21 %, pero hay productos básicos, como el pan o la leche, con tipos reducidos del 4 % o del 10 %.

¡Atención!

Antes de aplicar una regla de tres, pregúntate siempre: «si una magnitud aumenta, ¿la otra aumenta o disminuye?». Si las dos aumentan a la vez, la proporcionalidad es directa; si una aumenta y la otra disminuye, es inversa. Pero cuidado: no todas las magnitudes relacionadas son proporcionales. La edad y la estatura de una persona crecen a la vez, pero no en la misma proporción. Y en los porcentajes encadenados nunca se suman los porcentajes: se multiplican los índices de variación.

El consejo de Otto

Para calcular el 10 % de una cantidad, mueve la coma una posición a la izquierda; con eso obtienes el 5 % (mitad), el 20 % (doble) o el 15 % (10 % + 5 %) de cabeza.