Apuntes - Probabilidad

Curso: 3 Eso

En este tema aprenderás: experimentos aleatorios y sucesos, frecuencia relativa y probabilidad, regla de Laplace, operaciones con sucesos, técnicas de recuento, experimentos compuestos y cómo plantear un problema de probabilidad. Cada idea va en un cuadro de color, con ejemplos resueltos paso a paso.

Actividad de introducción: ¿quién gana el juego de los dados?

Pablo y Lucía, dos amigos de Burgos, juegan con un dado. Pablo gana un punto si sale un número par y Lucía lo gana si sale 1, 2 o 3. Parece un juego equilibrado, pero ¿lo es? Los resultados pares son 2, 4 y 6, y los que dan punto a Lucía son 1, 2 y 3; el 2 beneficia a los dos, así que el juego no es tan sencillo. Para decidirlo, se cuentan los casos favorables y se divide entre los casos posibles. La probabilidad mide el grado de confianza en que ocurra un suceso, con un número entre 0 (imposible) y 1 (seguro). En este tema aprenderás a describir experimentos aleatorios, a calcular probabilidades con la regla de Laplace y con la frecuencia relativa, a contar con técnicas de recuento y a estudiar experimentos formados por varias etapas con diagramas de árbol.




P = favc

Experimentos aleatorios y sucesos

Definición: aleatorio

Un experimento es **aleatorio** si no se puede predecir su resultado aunque se repita en las mismas condiciones: lanzar un dado, extraer una carta o girar una ruleta. El conjunto de todos los resultados posibles es el **espacio muestral** E. Para un dado, $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; para dos lanzamientos de una moneda, $E = \{CC, CX, XC, XX\}$. Un **suceso** es cualquier subconjunto de E. El suceso **seguro** es E y el **imposible** es $\emptyset$. Dos sucesos son **incompatibles** si no pueden ocurrir a la vez.

Frecuencia relativa y probabilidad

Propiedad

Si un experimento se repite N veces y un suceso ocurre n veces, su **frecuencia relativa** es $\frac{n}{N}$. Según la **ley de los grandes números**, al aumentar N la frecuencia relativa se aproxima a un valor fijo, la **probabilidad** del suceso. Por ejemplo, al lanzar una moneda 200 veces y obtener 108 caras, la frecuencia relativa es 0,54, cercana a

0,5. La probabilidad siempre cumple $0 \leq P(A) \leq 1$, con $P(E) = 1$ y $P(\emptyset) = 0$.

Regla de Laplace

Propiedad

Cuando todos los resultados son **equiprobables**, la probabilidad de un suceso A es:

Propiedad

$$P(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$$

Ejemplo 1

S con un dado: $P(\text{par}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ y $P(\text{mayor que } 4) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. En una baraja española de 40 cartas: $P(\text{as}) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$, $P(\text{oros}) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$ y $P(\text{figura}) = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$. La regla de Laplace solo es válida si los casos son igualmente probables: en una bolsa con 5 bolas rojas y 3 azules, sacar rojo o azul no son igual de probables, aunque haya dos colores.

Cómo se hace: calcular una probabilidad con la regla de Laplace

1. Comprueba que todos los resultados son equiprobables.
2. Cuenta los casos posibles.
3. Cuenta los casos favorables al suceso.
4. Divide: $P(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$ y expresa el resultado como fracción, decimal o porcentaje.

Operaciones con sucesos

Propiedad: operaciones con sucesos

- **Unión** $A \cup B$: ocurre A, B o ambos.
- **Intersección** $A \cap B$: ocurren A y B a la vez.
- **Contrario** : ocurre cuando no ocurre A, y .

Regla

Para la unión se cumple $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Si A y B son incompatibles, $P(A \cap B) = 0$ y las probabilidades se suman. Con $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}3$ y $P(A \cap B) = 0{,}1$: $P(A \cup B) = 0{,}7$.

Técnicas de recuento

Propiedad: técnicas de recuento

Para contar casos posibles sin escribirlos todos se usan:

- **Diagramas de árbol** y **tablas**, que muestran todas las combinaciones.
- **Principio multiplicativo**: si una elección se puede hacer de m formas y otra de n formas, las dos juntas se pueden hacer de $m \cdot n$ formas. Un menú con 3 primeros, 4 segundos y 2 postres tiene $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ combinaciones.
- **Permutaciones**: ordenar n elementos distintos de $n!$ maneras, con $n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$. Cinco libros se pueden ordenar de $5! = 120$ formas.

Regla

Los códigos de 4 cifras con repetición son $10^4 = 10\,000$; sin repetir cifras son $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5\,040$.

Experimentos compuestos

Propiedad

Un experimento compuesto consta de varias pruebas sucesivas. Se resuelve con un diagrama de árbol: la probabilidad de un camino es el **producto** de las probabilidades de sus ramas, y la probabilidad de un suceso es la **suma** de las probabilidades de los caminos que lo forman. Si las pruebas son **independientes** (como lanzar dos veces un dado o extraer con reemplazamiento), $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Si no lo son (extracciones sin reemplazamiento), las probabilidades de la segunda prueba cambian.

Ejemplo 2

Una urna con 3 bolas rojas y 2 azules; se sacan dos bolas sin reemplazamiento.

$P(RR) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$ y $P(AA) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$. La probabilidad de sacar dos bolas del mismo color es $\frac{3}{10} + \frac{1}{10} = \frac{2}{5}$.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 3

Dos dados: suma 7.

Casos favorables: (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1), es decir, 6 de 36. $P = \frac{1}{6}$.

Ejemplo 4

Moneda lanzada tres veces: hay $2^3 = 8$ resultados. $P(\text{exactamente 2 caras}) = \frac{3}{8}$ (CCX, CXC, XCC) y $P(\text{al menos una cara}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

Ejemplo 5

Al menos un 6 en dos lanzamientos: $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{11}{36}$.

Cómo plantear un problema de probabilidad

Observación

Primero identifica el experimento y decide si es simple o compuesto. Después escribe el espacio muestral o, si es muy grande, calcula cuántos casos posibles hay con una técnica de recuento. A continuación, cuenta los casos favorables y comprueba que todos los resultados son equiprobables antes de aplicar la regla de Laplace. Si el experimento tiene varias fases, dibuja un árbol, anota las probabilidades en cada rama y multiplica. Por último, comprueba que el resultado está entre 0 y 1 y que las probabilidades de todos los resultados posibles suman 1. Expresa la probabilidad como fracción irreducible, como decimal o como porcentaje según lo que pida el enunciado.

- Aplicar Laplace cuando los casos no son equiprobables.
- Sumar probabilidades de sucesos que no son incompatibles sin restar la intersección.
- Sumar en lugar de multiplicar las probabilidades a lo largo de las ramas de un árbol.
- No actualizar el número de bolas en las extracciones sin reemplazamiento.
- Dar una probabilidad mayor que 1 o negativa (señal clara de error).

Experimentos compuestos y diagramas de árbol

Método: probabilidad con un diagrama de árbol

1. Dibuja una rama por cada resultado de la primera etapa y escribe su probabilidad.
2. Desde cada rama, dibuja las ramas de la segunda etapa con sus probabilidades (cambian si no hay reposición).
3. La probabilidad de un camino completo es el producto de las probabilidades de sus ramas.
4. La probabilidad de un suceso que se cumple en varios caminos es la suma de las

probabilidades de esos caminos.

Ejemplo 6

En una caja hay 3 bolas rojas y 2 verdes. Se extraen dos bolas con reposición. Calcula la probabilidad de sacar dos bolas del mismo color.

Con reposición las probabilidades no cambian: $P(R) = \frac{3}{5}$ y $P(V) = \frac{2}{5}$. $P(RR) = \frac{9}{25}$ y $P(VV) = \frac{4}{25}$. Mismo color: $\frac{9}{25} + \frac{4}{25} = \frac{13}{25} = 0{,}52$.

Sucesos independientes y dependientes

Propiedad: independencia

Dos sucesos son independientes si que ocurra uno no modifica la probabilidad del otro, como dos lanzamientos de moneda o la extracción de bolas con reposición. En ese caso, $P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B)$. Si el resultado de una etapa cambia las probabilidades de la siguiente, como al extraer cartas sin devolverlas, los sucesos son dependientes y las probabilidades de la segunda etapa se calculan con el contenido que queda.

Ejemplo 7

Una baraja de 40 cartas: se extraen dos cartas sin reposición. Calcula la probabilidad de sacar dos reyes.

La primera es rey con $\frac{4}{40}$; la segunda, con 39 cartas y 3 reyes, es rey con $\frac{3}{39}$.

$P = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} = \frac{12}{1\,560} = \frac{1}{130} \approx 0{,}0077$.

- Pensar que si una moneda ha salido cara varias veces, es más probable que salga cruz: no tiene memoria.
- Usar la regla de Laplace con sucesos que no son equiprobables.
- Sumar probabilidades de sucesos que no son incompatibles sin restar la intersección.
- Olvidar que, sin reposición, la segunda extracción se hace con una bola menos.

¿Sabías que?

La teoría de la probabilidad nació en 1654, cuando el caballero de Méré planteó a Blaise Pascal un problema sobre cómo repartir el premio de un juego de dados

interrumpido. Pascal discutió el problema por carta con Pierre de Fermat, y de ese intercambio surgieron las ideas básicas de la probabilidad. Hoy se usa en las encuestas, en la meteorología, en los seguros y en la inteligencia artificial.

Probabilidad y sentido común

Ejemplo 8

En un sorteo hay 50 papeletas y Lucía compra 4. ¿Qué probabilidad tiene de ganar? ¿Y de no ganar?

Todas las papeletas tienen la misma probabilidad de salir, así que podemos usar la regla de Laplace. Los casos posibles son 50 y los favorables son las 4 papeletas de Lucía: $P(\text{ganar}) = \frac{4}{50} = 0{,}08$, es decir, un 8 %. Para calcular la probabilidad de no ganar usamos el suceso contrario: $P(\text{no ganar}) = 1 - 0{,}08 = 0{,}92$. Lucía tiene un 92 % de probabilidad de no ganar, así que, aunque haya comprado varias papeletas, lo más probable es que no le toque.

¡Atención!

La regla de Laplace solo se puede usar si todos los resultados son igual de probables. Al lanzar dos dados, la suma 7 es mucho más probable que la suma 2, aunque las dos sean «un resultado». Y recuerda que una probabilidad siempre está entre 0 y 1: si obtienes un número mayor que 1 o negativo, hay un error en el cálculo.

El consejo de Otto

Cuando el enunciado diga «al menos uno», calcula primero la probabilidad del contrario («ninguno») y réstala de 1: casi siempre es más corto.