Apuntes - Potencias y raíces

Curso: 3 Eso

En este tema aprenderás: qué es una potencia, exponentes enteros, propiedades de las potencias, raíces, propiedades de los radicales, cómo calcular con potencias paso a paso y potencias de 10 y raíces en la vida real. Cada idea va en un cuadro de color, con ejemplos resueltos paso a paso.

Actividad de introducción: la leyenda del tablero de ajedrez

Cuenta una vieja leyenda que el inventor del ajedrez pidió a su rey un premio modesto: un grano de trigo en la primera casilla del tablero, dos en la segunda, cuatro en la tercera, ocho en la cuarta, y así duplicando hasta la casilla 64. El rey aceptó riendo, pero la cuenta es enorme: en la casilla 10 hay $2^9 = 512$ granos, en la 20 hay $2^{19} = 524\,288$ y en la 64 hay 2^{63}, un número de 19 cifras. Las potencias sirven para escribir de forma breve las multiplicaciones repetidas y describen procesos que crecen muy deprisa, como las bacterias, el interés del dinero o la propagación de un rumor. Las raíces son la operación inversa de las potencias y permiten, por ejemplo, calcular el lado de un cuadrado conociendo su área. En este tema aprenderás a manejar las potencias con exponente entero, las raíces, los exponentes fraccionarios y los radicales.



Qué es una potencia

Propiedad

Una potencia a^n con exponente natural n es el producto de n factores iguales a a. Se llama **base** a a y **exponente** a n. Por ejemplo, $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$. Cuidado con los signos: $(-3)^4 = 81$ porque el exponente es par y la base negativa queda entre paréntesis, mientras que $-3^4 = -81$ porque solo se eleva el 3 y después se cambia el signo. Con exponente impar la potencia de un número negativo es negativa: $(-2)^3 = -8$.

Definición: potencia

Una **potencia** a^n es un producto de n factores iguales a a. El número a es la **base** y n el **exponente**. Por ejemplo, $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

Exponentes enteros

Propiedad: exponentes enteros

Para extender las potencias a exponentes negativos y al cero se definen:

- $a^0 = 1$ para $a \neq 0$.
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, es decir, un exponente negativo invierte la base: $5^{-2} = \frac{1}{25}$ y $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$.

Regla

Las potencias de 10 con exponente negativo dan decimales: $10^{-3} = 0{,}001$.

Propiedades de las potencias

Propiedad: propiedades de las potencias

Para $a \neq 0$ y m, n enteros:

- Producto de igual base: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.
- Cociente de igual base: $a^m : a^n = a^{m-n}$.
- Potencia de una potencia: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.
- Potencia de un producto: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.
- Potencia de un cociente: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Observación

Estas propiedades solo se aplican a productos y cocientes, nunca a sumas: $(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$. Para combinar potencias de bases distintas se intenta descomponer las bases en factores primos. Por ejemplo, $\frac{4^3 \cdot 2^5}{8^2} = \frac{(2^2)^3 \cdot 2^5}{(2^3)^2} = \frac{2^6 \cdot 2^5}{2^6} = 2^5 = 32$.

Raíces

Regla

La raíz n-ésima de a es el número b tal que $b^n = a$, y se escribe $\sqrt[n]{a} = b$. Si $n = 2$ se omite el índice. Una raíz de índice par de un número negativo no existe entre los reales ($\sqrt{-4}$ no tiene solución real), pero una raíz de índice impar sí: $\sqrt[3]{-8} = -2$. Por tanto $\sqrt[3]{64} = 4$, $\sqrt[4]{81} = 3$ y $\sqrt[5]{32} = 2$.

Observación

Una raíz se puede escribir como potencia de exponente fraccionario: $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$. Así, $\sqrt{a} = a^{1/2}$ y las propiedades de las potencias ayudan a trabajar con radicales.

Propiedades de los radicales

Propiedad: propiedades de los radicales

- $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ y $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$.
- Extraer factores: $\sqrt{300} = \sqrt{100 \cdot 3} = 10\sqrt{3}$.
- Sumar radicales solo es posible si son *semejantes* (mismo índice y mismo radicando): $2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$, pero $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ no se puede simplificar.

Cómo se hace: simplificar un radical

1. Descompón el radicando en factores primos.
2. Agrupa los factores en potencias con el mismo exponente que el índice.
3. Saca fuera de la raíz cada factor que forme un grupo completo.
4. Por ejemplo, $\sqrt{72} = \sqrt{2^3 \cdot 3^2} = 2 \cdot 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 1

Simplifica $\frac{3^5 \cdot 3^{-2}}{3^4}$.

Sumamos exponentes arriba: $3^{5-2} = 3^3$. Restamos: $3^{3-4} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$.

Ejemplo 2

Calcula $\sqrt{12} + \sqrt{27}$.

Extraemos factores: $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ y $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$. Suma: $5\sqrt{3}$.

Ejemplo 3

Compara $\sqrt{20}$ y $3\sqrt{2}$. Metemos el 3 dentro: $3\sqrt{2} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{18}$. Como $20 > 18$, $\sqrt{20} > 3\sqrt{2}$.

Cómo calcular con potencias paso a paso

Observación

Ante un ejercicio con potencias, primero comprueba los signos y los paréntesis. Después pasa a exponente positivo las potencias con exponente negativo si te resulta más cómodo. A continuación descompón las bases en factores primos para que todas coincidan, aplica las propiedades y, por último, calcula el valor numérico. Si el resultado es una fracción, simplifícala. Cuando trabajes con números muy grandes o muy pequeños, la notación científica y las propiedades de las potencias de 10 te permiten operar sin calculadora: se multiplican los coeficientes y se suman los exponentes.

Regla

En problemas de crecimiento, como una población que se duplica cada hora, aparece una potencia de base 2: después de n horas hay 2^n individuos si se empieza con uno. Las potencias crecen muy deprisa: $2^{10} = 1\,024$ y $2^{20} = 1\,048\,576$.

Potencias de 10 y raíces en la vida real

Regla

Las potencias de 10 aparecen cada vez que cambiamos de unidad: un kilómetro son 10^3 metros, un milímetro es 10^{-3} metros y un gigabyte son aproximadamente 10^9 bytes. Saber manejar exponentes positivos y negativos permite pasar de una unidad a otra sin errores. Por ejemplo, para expresar 3 500 m en kilómetros se divide entre 10^3: $3{,}5 \cdot 10^3 : 10^3 = 3{,}5$ km.

Regla

Las raíces cuadradas surgen al calcular el lado de un cuadrado conociendo su área, y las raíces cúbicas al calcular la arista de un cubo conociendo su volumen. Si un depósito cúbico tiene una capacidad de 64 litros, es decir, 64 dm^3, cada arista mide $\sqrt[3]{64} = 4$ dm. Cuando la raíz no es exacta, se da una aproximación razonable con unidades, por ejemplo $\sqrt{20} \approx 4{,}47$ m.

Observación

Recuerda también la relación entre potencias y raíces: elevar al cuadrado y extraer la raíz cuadrada son operaciones inversas para números positivos. Por eso $\left(\sqrt{7}\right)^2 = 7$ y $\sqrt{7^2} = 7$. Esta idea se usa para comprobar resultados: si crees que $\sqrt{300} = 10\sqrt{3}$, eleva al cuadrado $10\sqrt{3}$ y obtendrás $100 \cdot 3 = 300$.

- Confundir $-3^2 = -9$ con $(-3)^2 = 9$.
- Multiplicar los exponentes al multiplicar potencias de igual base (hay que sumarlos).
- Pensar que 2^{-3} es negativo: $2^{-3} = \frac{1}{8}$ es positivo.
- Escribir $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$.
- Sumar potencias con distinta base como si se pudieran juntar: $2^3 + 2^4 \neq 2^7$.

Potencias en situaciones de crecimiento

Propiedad: crecimiento y decrecimiento exponencial

Si una cantidad se multiplica por un factor fijo r en cada período, después de t períodos vale $C \cdot r^t$. Si $r > 1$ la cantidad crece (un aumento del 3 % da $r = 1{,}03$); si 0 decrece (una pérdida del 15 % da $r = 0{,}85$). El exponente cuenta los períodos transcurridos y el factor se calcula a partir del porcentaje.

Ejemplo 4

Una piscina pierde el 10 % del agua por evaporación cada semana. Si tiene 800 litros, ¿cuántos quedan tras 3 semanas?

El factor es $1 - 0{,}10 = 0{,}9$. Quedan $800 \cdot 0{,}9^3 = 800 \cdot 0{,}729 = 583{,}2$ litros.

Racionalizar un denominador

Método: racionalizar $\frac{a}{\sqrt{b}}$

1. Multiplica numerador y denominador por $\sqrt{b}$, lo que no cambia el valor de la fracción.
2. En el denominador queda $\sqrt{b} \cdot \sqrt{b} = b$, que ya no tiene raíz.
3. Simplifica la fracción resultante si es posible.

Ejemplo 5

Racionaliza $\frac{6}{\sqrt{3}}$.

$$\frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3} \approx 3{,}46.$$

Observación: cómo usar la calculadora

La mayoría de las calculadoras científicas tienen una tecla para elevar a un exponente y otra para raíces de cualquier índice. Antes de pulsar, estima el resultado mentalmente: si calculas $1{,}03^{10}$, sabes que debe ser un poco mayor que 1; si obtienes 30, algo ha ido mal. Para exponentes negativos, escribe el exponente entre paréntesis y comprueba que el resultado es el inverso de la potencia positiva. Esta costumbre de estimar y comprobar evita muchos errores en los problemas de crecimiento y de notación científica.

- Escribir $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ o $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
- Confundir $-3^2 = -9$ con $(-3)^2 = 9$.
- Multiplicar los exponentes al multiplicar potencias de la misma base: hay que sumarlos.
- Pensar que a^{-n} es negativo: $2^{-3} = \dfrac{1}{8}$ es positivo.

¿Sabías que?

El símbolo de la raíz cuadrada, $\sqrt{}$, procede de una r estilizada de la palabra latina *radix*, que significa «raíz». Los exponentes negativos y fraccionarios los generalizó el matemático inglés John Wallis en el siglo XVII, y Newton los popularizó. Gracias a ellos podemos escribir con unas pocas cifras tanto el tamaño de un virus como la distancia entre galaxias.

Repaso: errores que conviene evitar

¡Atención!

Las propiedades de las potencias solo sirven cuando las bases son iguales (para multiplicar o dividir) o cuando los exponentes son iguales (para multiplicar bases distintas). No existe ninguna propiedad para la suma: $2^3 + 2^4$ no es 2^7, sino $8 + 16 = 24$. Del mismo modo, la raíz de una suma no es la suma de las raíces: $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$, mientras que $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$. Por último, un exponente negativo no hace negativo el resultado: $2^{-3} = \dfrac{1}{8}$, que es positivo.

Ejemplo 6

Simplifica $\dfrac{4^3 \cdot 8}{2^5}$ escribiendo todo como potencias de 2.

Primero expresamos cada base como potencia de 2: $4 = 2^2$, así que $4^3 = (2^2)^3 = 2^6$, y

$8 = 2^3$. El numerador queda $2^6 \cdot 2^3 = 2^9$, porque al multiplicar potencias de la misma base se suman los exponentes. Después dividimos: $2^9 : 2^5 = 2^4 = 16$. Esta técnica de pasar todo a la misma base es muy útil cuando aparecen números como 4, 8, 16 o 32, que son potencias de 2, o como 9, 27 y 81, que son potencias de 3.

El consejo de Otto

Si dudas con un exponente negativo, escribe primero la fracción: a^{-n} es «uno partido por a^n». Y si ves una base que es potencia de otra, como 4, 8 o 16 respecto de 2, descomponla: casi siempre simplifica el problema.