Ejercicios - Potencias y raíces

Curso: 3 Eso · 20

Se debe mostrar el desarrollo de cada ejercicio.

Ejercicio 1

Ejercicio 1 – Calcular potencias

Calcula cada potencia con cuidado: observa dónde están los paréntesis y el signo de la base.

a. 2^5 y 5^0
b. $(-3)^4$ y -3^4
c. $(-2)^3$ y $(-2)^4$
d. ¿Por qué $(-3)^4$ y -3^4 dan resultados distintos?

Ejercicio 2

Ejercicio 2 – Exponentes negativos

Recuerda que $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ y que $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$.

a. 2^{-3} y 10^{-4}
b. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$
c. $(-2)^{-3}$
d. $\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$

Ejercicio 3

Ejercicio 3 – Propiedades de las potencias

Aplica $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $a^m : a^n = a^{m-n}$ y $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

a. $3^4 \cdot 3^2$
b. $5^7 : 5^4$
c. $(2^3)^2$
d. $2^5 \cdot 2^{-2}$

Ejercicio 4

Ejercicio 4 – Propiedades combinadas

Simplifica aplicando las propiedades antes de calcular.

a. $\dfrac{2^3 \cdot 2^{-5}}{2^{-2} \cdot 2^4}$
b. $\left(3^2 \cdot 3^{-4}\right)^{-1}$
c. $\dfrac{5^6 \cdot 5^{-4}}{5^3}$
d. $(x^3)^2 \cdot x^{-4}$

Ejercicio 5

Ejercicio 5 – Potencias de 10

Las potencias de 10 permiten escribir números muy grandes o muy pequeños.

a. Calcula $10^3 \cdot 10^{-5}$ y escribe el resultado como decimal.
b. Escribe $0{,}0001$ y $3\,500\,000$ como potencias de 10 o en notación científica.
c. Calcula $\dfrac{10^6}{10^9}$.
d. ¿Cuántos ceros tiene 10^{-4} antes de la primera cifra significativa, contando el cero de las unidades?

Ejercicio 6

Ejercicio 6 – Raíces exactas

Calcula cada raíz o razona por qué no existe en los números reales.

a. $\sqrt{81}$ y $\sqrt{0{,}04}$
b. $\sqrt[3]{27}$ y $\sqrt[3]{-8}$
c. $\sqrt[4]{16}$ y $\sqrt[5]{32}$
d. $\sqrt{-9}$

Ejercicio 7

Ejercicio 7 – Exponentes fraccionarios

Una raíz es una potencia de exponente fraccionario: $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$.

a. $9^{1/2}$ y $8^{1/3}$
b. $16^{3/4}$
c. $27^{2/3}$
d. $4^{-1/2}$

Ejercicio 8

Ejercicio 8 – Propiedades de los radicales

Usa $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$ y $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$, y saca factores de la raíz.

a. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$
b. $\dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$
c. $\sqrt{72}$
d. $\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}$ y $\sqrt[3]{16}$

Ejercicio 9

Ejercicio 9 – Suma y producto de radicales

Solo se pueden sumar radicales semejantes (mismo índice y mismo radicando). Si no lo parecen, simplifica antes.

a. $3\sqrt{2}+5\sqrt{2}$
b. $\sqrt{18}+\sqrt{8}$
c. $\sqrt{75}-\sqrt{12}$
d. $2\sqrt{5}\cdot 3\sqrt{5}$

Ejercicio 10

Ejercicio 10 – Las bacterias del laboratorio

En un cultivo de un laboratorio hay 3 bacterias al principio y su número se duplica cada hora.

a. Escribe la fórmula del número de bacterias N tras t horas.
b. Calcula N para $t=5$ y para $t=10$.
c. ¿Cuántas horas deben pasar para superar las 1 000 bacterias?
d. ¿Cuántas bacterias había 2 horas antes del inicio si el crecimiento hubiera sido el mismo? Usa un exponente negativo.

Ejercicio 11

Ejercicio 11 – Ahorro con interés compuesto

María deposita 2 000 € en un banco de Valencia con un interés compuesto del 3 % anual. Cada año el capital se multiplica por $1{,}03$.

a. Escribe la fórmula del capital C tras t años.
b. Calcula el capital tras 2 años y tras 3 años.

c. ¿Cuántos euros ha ganado en 3 años?
d. ¿Qué capital habría con interés simple (3 % de 2 000 € cada año) en 3 años? Compara.

Ejercicio 12

Ejercicio 12 – El papel doblado

Un folio de 0,1 mm de grosor se dobla por la mitad varias veces. Cada doblez duplica el grosor.

a. Escribe el grosor g (en mm) después de n dobleces.
b. Calcula el grosor tras 7 y tras 10 dobleces.
c. Calcula el grosor tras 20 dobleces en metros.
d. Compara ese resultado con la altura de un edificio de 100 m.

Ejercicio 13

Ejercicio 13 – El acuario cúbico

Un acuario cúbico de un museo de Valencia tiene una capacidad de 216 litros. Recuerda que 1 litro es 1 dm^3.

a. Calcula la arista del cubo con una raíz cúbica.
b. Calcula el área de una cara y el área total de las caras.
c. Si se llena hasta $\frac{5}{6}$ de su altura, ¿cuántos litros contiene?
d. ¿Cuál es la longitud de la diagonal de una cara? Exprésala con un radical.

Ejercicio 14

Ejercicio 14 – El crecimiento de una población

Una ciudad gallega tiene 25 000 habitantes y su población crece un 2 % cada año.

a. Escribe la fórmula $P(t) = 25\,000 \cdot 1{,}02^t$ y explica por qué se usa el factor 1,02.
b. Calcula la población dentro de 5 años (redondea a las unidades).
c. Calcula la población dentro de 10 años.
d. ¿Cuánto ha crecido la población en esos 10 años?

Ejercicio 15

Ejercicio 15 – El viaje a la estrella más cercana

Un año luz equivale a $9{,}46 \cdot 10^{12}$ km. Próxima Centauri, la estrella más cercana al Sol, está a 4,24 años luz.

a. Calcula la distancia en kilómetros en notación científica.

b. Una nave viaja a $5 \cdot 10^4$ km/h. ¿Cuántas horas tardaría?
c. Expresa ese tiempo en años (1 año $\approx 8\,760$ h).
d. ¿Cuántas veces mayor es esta distancia que la que separa la Tierra de la Luna ($3{,}84 \cdot 10^5$ km)?

Ejercicio 16

Ejercicio 16 – La sala rectangular

El suelo de una sala de un museo es un rectángulo cuyos lados miden $2\sqrt{3}$ m y $3\sqrt{3}$ m.

a. Calcula el área exacta y comprueba que es un número entero.
b. Calcula el perímetro exacto y aproximado con dos decimales.
c. Calcula la diagonal con el teorema de Pitágoras.
d. Si el metro cuadrado de parqué cuesta 40 €, ¿cuánto cuesta el suelo?

Ejercicio 17

Ejercicio 17 – El valor del coche

Un coche de 18 000 € pierde un 15 % de su valor cada año. Cada año el valor se multiplica por 0,85.

a. Escribe la fórmula del valor V tras t años.
b. Calcula el valor tras 3 años.
c. Calcula el valor tras 5 años.
d. ¿Qué porcentaje del valor inicial ha perdido en 5 años?

Ejercicio 18

Ejercicio 18 – El rumor del instituto

Un alumno cuenta un rumor a 3 compañeros a las 9:00. Cada hora, cada persona que lo ha oído por última vez lo cuenta a otras 3 personas que no lo sabían.

a. ¿Cuántas personas nuevas se enteran en la hora n? Escríbelo como potencia.
b. Calcula las personas nuevas en la hora 1, 2, 3, 4 y 5.
c. Calcula cuántas personas conocen el rumor (contando al primero) después de 5 horas.
d. ¿En cuántas horas lo conocen más de 1 000 personas?

Ejercicio 19

Ejercicio 19 – La memoria del ordenador

En informática, 1 KB $= 2^{10}$ bytes, 1 MB $= 2^{10}$ KB y 1 GB $= 2^{10}$ MB.

a. Expresa 1 MB y 1 GB en bytes como potencias de 2.

b. Calcula 8 GB en bytes como potencia de 2 y con todas las cifras.
c. Una foto ocupa 4 MB. ¿Cuántas fotos caben en 8 GB? Usa las propiedades de las potencias.
d. ¿Cuántas veces es mayor 1 GB que 1 KB?

Ejercicio 20

Ejercicio 20 – Desafío: potencias y radicales

Resuelve estos retos con las propiedades de las potencias y las raíces.

a. Simplifica $\frac{2^{n+2}-2^n}{2^n}$.
b. Racionaliza $\frac{1}{\sqrt{2}}$ multiplicando numerador y denominador por $\sqrt{2}$.
c. ¿Cuál es mayor, 2^{30} o 3^{20}? Compáralos escribiendo $2^{30}=(2^3)^{10}$ y $3^{20}=(3^2)^{10}$.
d. Resuelve $2^x=\frac{1}{32}$ y $5^{x+1}=125$.