Soluciones - Potencias y raíces

Curso: 3 Eso

Solución del ejercicio 1

a. $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ y $5^0 = 1$ (cualquier número distinto de 0 elevado a 0 vale 1).
b. $(-3)^4 = (-3)(-3)(-3)(-3) = 81$ y $-3^4 = -(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = -81$.
c. $(-2)^3 = -8$ (exponente impar, resultado negativo) y $(-2)^4 = 16$ (exponente par, resultado positivo).
d. En $(-3)^4$ el exponente afecta a la base -3 completa. En -3^4 el exponente afecta solo al 3 y el signo menos se aplica después.

Solución del ejercicio 2

a. $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ y $10^{-4} = \frac{1}{10\,000} = 0{,}0001$. Un exponente negativo indica el inverso de la potencia con exponente positivo. Respuesta: $\frac{1}{8}$ y $0{,}0001$.
b. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 3^2 = 9$. Invertimos la fracción y cambiamos el signo del exponente. Respuesta: 9.
c. $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}$. Como el exponente 3 es impar, el signo negativo se mantiene. Respuesta: $-\frac{1}{8}$.
d. $\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} = \frac{4}{3}$. Elevar a -1 es lo mismo que calcular la fracción inversa. Respuesta: $\frac{4}{3}$.

Solución del ejercicio 3

a. $3^{4+2} = 3^6 = 729$. Al multiplicar potencias de la misma base se mantiene la base y se suman los exponentes. Respuesta: $3^6 = 729$.
b. $5^{7-4} = 5^3 = 125$. Al dividir potencias de la misma base se restan los exponentes. Respuesta: $5^3 = 125$.
c. $2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 64$. Una potencia de una potencia se calcula multiplicando los exponentes. Respuesta: $2^6 = 64$.
d. $2^{5-2} = 2^3 = 8$. Sumamos los exponentes aunque uno sea negativo: $5 + (-2) = 3$. Respuesta: $2^3 = 8$.

Solución del ejercicio 4

a. Numerador: $2^{3-5} = 2^{-2}$. Denominador: $2^{-2+4} = 2^{2}$. Cociente: $2^{-2-2} = 2^{-4} = \frac{1}{16}$. Restar un exponente negativo equivale a sumar. Respuesta: $\frac{1}{16}$.

b. Dentro: $3^{2-4} = 3^{-2}$. Elevamos a -1: $3^{2} = 9$. Al elevar a -1 se cambia el signo del exponente. Respuesta: 9.

c. Numerador: $5^{6-4} = 5^{2}$. Cociente: $5^{2-3} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$. Respuesta: $\frac{1}{5}$.

d. $x^{3\cdot 2} \cdot x^{-4} = x^{6-4} = x^{2}$. Primero aplicamos la potencia de una potencia y después el producto de potencias de la misma base. Respuesta: x^{2}.

Solución del ejercicio 5

a. $10^{3-5} = 10^{-2} = 0{,}01$. Sumamos los exponentes: $3 + (-5) = -2$.

b. $0{,}0001 = 10^{-4}$ y $3\,500\,000 = 3{,}5 \cdot 10^{6}$.

c. $10^{6-9} = 10^{-3} = 0{,}001$. Restamos los exponentes: $6 - 9 = -3$.

d. $10^{-4} = 0{,}0001$: hay 4 ceros contando el de las unidades (el exponente -4 indica la posición del 1 después de la coma).

Solución del ejercicio 6

a. $\sqrt{81} = 9$ porque $9^{2} = 81$; $\sqrt{0{,}04} = 0{,}2$ porque $0{,}2^{2} = 0{,}04$.

b. $\sqrt[3]{27} = 3$; $\sqrt[3]{-8} = -2$ porque $(-2)^{3} = -8$ (una raíz de índice impar admite radicando negativo).

c. $\sqrt[4]{16} = 2$ porque $2^{4} = 16$; $\sqrt[5]{32} = 2$ porque $2^{5} = 32$.

d. No existe en los reales: ningún número real elevado al cuadrado da -9 (una raíz de índice par no admite radicando negativo).

Solución del ejercicio 7

a. $9^{1/2} = \sqrt{9} = 3$ y $8^{1/3} = \sqrt[3]{8} = 2$. El denominador del exponente es el índice de la raíz. Respuesta: 3 y 2.

b. $16^{3/4} = \left(\sqrt[4]{16}\right)^{3} = 2^{3} = 8$. Primero hacemos la raíz cuarta, que es 2, y después elevamos al cubo. Respuesta: 8.

c. $27^{2/3} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^{2} = 3^{2} = 9$. La raíz cúbica de 27 es 3, y su cuadrado es 9. Respuesta: 9.

d. $4^{-1/2} = \dfrac{1}{4^{1/2}} = \dfrac{1}{\sqrt{4}} = \dfrac{1}{2}$. El signo negativo del exponente indica el inverso. Respuesta: $\dfrac{1}{2}$.

Solución del ejercicio 8

a. $\sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$. Multiplicamos los radicandos porque tienen el mismo índice, y 16 es un cuadrado perfecto. Respuesta: 4.
b. $\sqrt{\dfrac{50}{2}} = \sqrt{25} = 5$. Dividimos los radicandos dentro de una sola raíz. Respuesta: 5.
c. $\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = 6\sqrt{2}$. Buscamos el mayor cuadrado perfecto que divide a 72, que es 36, y sacamos su raíz. Respuesta: $6\sqrt{2}$.
d. $\sqrt{3 \cdot 12} = \sqrt{36} = 6$. Y $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8 \cdot 2} = 2\sqrt[3]{2}$. En la raíz cúbica buscamos un cubo perfecto, 8, dentro del radicando. Respuestas: 6 y $2\sqrt[3]{2}$.

Solución del ejercicio 9

a. $(3+5)\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$. Son radicales semejantes, así que sumamos los coeficientes como si fueran términos semejantes. Respuesta: $8\sqrt{2}$.
b. $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ y $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Suma: $5\sqrt{2}$. Al principio no parecen semejantes, pero después de simplificar los dos tienen $\sqrt{2}$. Respuesta: $5\sqrt{2}$.
c. $\sqrt{75} = 5\sqrt{3}$ y $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. Resta: $3\sqrt{3}$. Sacamos de la raíz los cuadrados 25 y 4. Respuesta: $3\sqrt{3}$.
d. $2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 6 \cdot 5 = 30$. Multiplicamos los coeficientes entre sí y las raíces entre sí; $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5$. Respuesta: 30.

Solución del ejercicio 10

a. $N = 3 \cdot 2^t$. Partimos de 3 y multiplicamos por 2 cada hora, así que tras t horas multiplicamos t veces por 2.
b. $N(5) = 3 \cdot 32 = 96$ y $N(10) = 3 \cdot 1\,024 = 3\,072$. Calculamos primero la potencia de 2 y después multiplicamos por 3.
c. $N(8) = 3 \cdot 256 = 768$ y $N(9) = 3 \cdot 512 = 1\,536 > 1\,000$. Hacen falta 9 horas. Probamos valores de t hasta pasar de 1 000. Respuesta: 9 horas.
d. $N(-2) = 3 \cdot 2^{-2} = \dfrac{3}{4}$: la fórmula daría $0{,}75$, valor que no tiene sentido físico porque no hay fracciones de bacteria. Un exponente negativo significa retroceder en el tiempo.

Solución del ejercicio 11

a. $C(t) = 2\,000 \cdot 1{,}03^t$. Cada año el capital se multiplica por 1,03, así que tras t años se multiplica por $1{,}03^t$.
b. $C(2) = 2\,000 \cdot 1{,}0609 = 2\,121{,}80$ € y $C(3) = 2\,000 \cdot 1{,}092727 \approx 2\,185{,}45$ €. Calculamos la potencia de 1,03 y multiplicamos por 2 000.
c. $2\,185{,}45 - 2\,000 = 185{,}45$ €. Restamos el capital inicial al capital final.
d. Interés simple: $2\,000 + 3 \cdot 60 = 2\,180$ €. El compuesto da $5{,}45$ € más, porque los intereses también generan intereses. Respuesta: el interés compuesto da más dinero.

Solución del ejercicio 12

a. $g(n) = 0{,}1 \cdot 2^n$ mm. Cada doblez multiplica el grosor por 2.
b. $g(7) = 0{,}1 \cdot 128 = 12{,}8$ mm. $g(10) = 0{,}1 \cdot 1\,024 = 102{,}4$ mm. Calculamos $2^7 = 128$ y $2^{10} = 1\,024$ y multiplicamos por 0,1.
c. $g(20) = 0{,}1 \cdot 1\,048\,576 = 104\,857{,}6$ mm $\approx 104{,}9$ m. Dividimos entre 1 000 para pasar de milímetros a metros.
d. Superaría los 100 m del edificio. Aunque en la práctica no se puede doblar tantas veces, ilustra el crecimiento rapidísimo de las potencias.

Solución del ejercicio 13

a. Arista $= \sqrt[3]{216} = 6$ dm. Buscamos el número que elevado al cubo da 216: $6^3 = 216$. Respuesta: la arista mide 6 dm.
b. Una cara: $6^2 = 36$ dm^2. Seis caras: $6 \cdot 36 = 216$ dm^2. Un cubo tiene seis caras cuadradas iguales.
c. $216 \cdot \dfrac{5}{6} = 180$ litros. Al llenar $\dfrac{5}{6}$ de la altura, el volumen de agua es $\dfrac{5}{6}$ del total. Respuesta: 180 litros.
d. Diagonal $= \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \approx 8{,}49$ dm. La diagonal es la hipotenusa de un triángulo rectángulo con dos aristas como catetos.

Solución del ejercicio 14

a. Un aumento del 2 % equivale a multiplicar por $1 + 0{,}02 = 1{,}02$ cada año.
b. $1{,}02^5 \approx 1{,}10408$; $P(5) \approx 27\,602$ habitantes.
c. $1{,}02^{10} \approx 1{,}21899$; $P(10) \approx 30\,475$ habitantes.
d. $30\,475 - 25\,000 = 5\,475$ habitantes, un $21{,}9\,\%$ más. Respuesta: la ciudad gana unos 5 475 habitantes.

Solución del ejercicio 15

a. $9{,}46 \cdot 10^{12} \cdot 4{,}24 \approx 4{,}01 \cdot 10^{13}$ km. Multiplicamos las mantisas y mantenemos la potencia de 10.
b. $\dfrac{4{,}01 \cdot 10^{13}}{5 \cdot 10^{4}} \approx 8{,}02 \cdot 10^{8}$ horas. Dividimos las mantisas y restamos los exponentes.
c. $\dfrac{8{,}02 \cdot 10^{8}}{8\,760} \approx 9{,}16 \cdot 10^{4}$, es decir, unos 91 600 años.
d. $\dfrac{4{,}01 \cdot 10^{13}}{3{,}84 \cdot 10^{5}} \approx 1{,}04 \cdot 10^{8}$: unos 104 millones de veces. Respuesta: la estrella está unos 104 millones de veces más lejos que la Luna.

Solución del ejercicio 16

a. Área $= 2\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} = 6 \cdot 3 = 18$ m^2 (entero). Multiplicamos los coeficientes, $2 \cdot 3 = 6$, y las raíces, $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$.
b. Perímetro $= 2(2\sqrt{3} + 3\sqrt{3}) = 10\sqrt{3} \approx 17{,}32$ m. Sumamos los radicales semejantes dentro del paréntesis.
c. Diagonal $= \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{12 + 27} = \sqrt{39} \approx 6{,}24$ m. Elevamos al cuadrado cada lado: $(2\sqrt{3})^2 = 4 \cdot 3 = 12$ y $(3\sqrt{3})^2 = 9 \cdot 3 = 27$.
d. $18 \cdot 40 = 720$ €. Multiplicamos el área por el precio de cada metro cuadrado. Respuesta: el parqué cuesta 720 €.

Solución del ejercicio 17

a. $V(t) = 18\,000 \cdot 0{,}85^{t}$. Perder un 15 % equivale a conservar el 85 % cada año.
b. $0{,}85^{3} = 0{,}614125$; $V(3) = 11\,054{,}25$ €. Respuesta: a los 3 años vale unos 11 054 €.
c. $0{,}85^{5} \approx 0{,}44371$; $V(5) \approx 7\,986{,}70$ €. Respuesta: a los 5 años vale unos 7 987 €.
d. Conserva el $44{,}37\ \%$, así que pierde el $55{,}63\ \%$ (más de la mitad).

Solución del ejercicio 18

a. En la hora n se enteran 3^{n} personas nuevas.
b. Hora 1: 3; hora 2: 9; hora 3: 27; hora 4: 81; hora 5: 243.
c. Total $= 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 = 364$ personas.
d. En 6 horas: $364 + 729 = 1\,093 > 1\,000$. En 5 horas son 364, así que hacen falta 6 horas.

Solución del ejercicio 19

a. 1 MB $= 2^{10} \cdot 2^{10} = 2^{20}$ bytes. 1 GB $= 2^{10} \cdot 2^{20} = 2^{30}$ bytes. Multiplicamos potencias de la misma base sumando los exponentes.

b. $8 \cdot 2^{30} = 2^3 \cdot 2^{30} = 2^{33} = 8\,589\,934\,592$ bytes. Escribimos 8 como 2^3 y sumamos exponentes.

c. 4 MB $= 2^2 \cdot 2^{20} = 2^{22}$ bytes. Fotos: $\dfrac{2^{33}}{2^{22}} = 2^{11} = 2\,048$. Dividimos potencias de la misma base restando exponentes.

d. $\dfrac{2^{30}}{2^{10}} = 2^{20} = 1\,048\,576$ veces. Respuesta: más de un millón de veces.

Solución del ejercicio 20

a. Sacando factor común: $\dfrac{2^n(2^2-1)}{2^n} = 4 - 1 = 3$.

b. $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707$. Así el denominador deja de tener raíz.

c. $2^{30} = 8^{10}$ y $3^{20} = 9^{10}$. Como $9 > 8$, $3^{20} > 2^{30}$.

d. $2^x = 2^{-5}$, luego $x = -5$. $5^{x+1} = 5^3$, luego $x + 1 = 3$ y $x = 2$. Respuesta: $x = -5$ en la primera y $x = 2$ en la segunda.