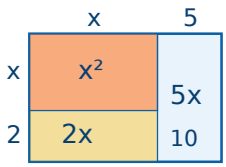
Apuntes - Polinomios

Curso: 3 Eso

En este tema aprenderás: monomios y polinomios, operaciones con polinomios, división por $x - a$: regla de Ruffini, identidades notables, factorización de polinomios, cómo organizar el trabajo con polinomios y para qué sirve factorizar. Cada idea va en un cuadro de color, con ejemplos resueltos paso a paso.

Actividad de introducción: el embaldosado de un patio

En el patio de un instituto de Salamanca se quiere colocar un suelo nuevo. El patio es un rectángulo de $x + 5$ metros de largo y $x + 2$ de ancho, y x es una medida que todavía no conocemos porque depende del proyecto. ¿Cuántos metros cuadrados de baldosas hacen falta? La respuesta no es un número, sino una expresión, $(x + 5)(x + 2) = x^2 + 7x + 10$, que sirve para cualquier valor de x. Cuando el arquitecto decide que $x = 10$, basta sustituir y obtener 150 m^2. Esa expresión se llama polinomio y, con él, el cálculo de áreas, volúmenes, costes y beneficios se hace de una sola vez para todos los casos. En este tema aprenderás a operar con polinomios, a dividirlos y a descomponerlos en factores.



Monomios y polinomios

Definición: monomio

Un **monomio** es una expresión algebraica formada por el producto de un número, llamado **coeficiente**, y una o varias letras con exponentes naturales. Por ejemplo, $-4x^5$ tiene coeficiente -4, parte literal x^5 y grado 5. Un **polinomio** es una suma de monomios, llamados términos. El **grado** del polinomio es el mayor grado de sus términos, el **coeficiente principal** es el del término de mayor grado y el **término independiente** es el que no lleva letra. En $P(x) = 4x^3 - 2x^2 + x - 7$: grado 3, coeficiente principal 4 y término independiente -7.

Definición: valor numérico

El **valor numérico** de $P(x)$ para $x = a$ es el número $P(a)$ que resulta al sustituir. Por ejemplo, $P(2) = 4 \cdot 8 - 2 \cdot 4 + 2 - 7 = 19$.

Operaciones con polinomios

Propiedad: operaciones con polinomios

- **Suma y resta:** se agrupan los términos semejantes (misma parte literal). Al restar se cambia el signo de todos los términos del sustraendo: $(5x^3 + x - 2) - (2x^3 - x^2 + 3x + 1) = 3x^3 + x^2 - 2x - 3$.
- **Producto:** se multiplica cada término de un polinomio por cada término del otro, aplicando $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$, y se reducen términos semejantes: $(x + 3)(x - 5) = x^2 - 5x + 3x - 15 = x^2 - 2x - 15$.
- **División:** se obtiene un cociente $C(x)$ y un resto $R(x)$ de grado menor que el divisor, de modo que $P(x) = D(x) \cdot C(x) + R(x)$.

División por $x - a$: regla de Ruffini

Regla

Cuando el divisor es de la forma $x - a$ se usa la regla de Ruffini. Se escriben los coeficientes del dividendo (con ceros en los términos que faltan), se baja el primero y se multiplica cada resultado por a, sumando con el coeficiente siguiente. Para dividir $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ entre $x - 2$:

	1	2	-5	-6
2		2	8	6
	1	4	3	0

Definición: teorema del resto

El cociente es $x^2 + 4x + 3$ y el resto es 0. El **teorema del resto** afirma que el resto de dividir $P(x)$ entre $x - a$ es $P(a)$. Si el resto es 0, a es una **raíz** del polinomio y $x - a$ es un factor suyo.

Identidades notables

Propiedad: identidades notables

- Cuadrado de una suma: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
- Cuadrado de una diferencia: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
- Suma por diferencia: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

Observación

Sirven para multiplicar rápido, por ejemplo $99^2 = (100 - 1)^2 = 9\,801$ o

$51 \cdot 49 = (50+1)(50-1) = 2\,499$, y para factorizar. Recuerda que $(a+b)^2$ no es a^2+b^2: falta el doble producto $2ab$.

Factorización de polinomios

Método: factorización de polinomios

Factorizar es escribir un polinomio como producto de polinomios de menor grado. Se procede así:

1. **Sacar factor común**: $6x^3 - 9x^2 + 3x = 3x(2x^2 - 3x + 1)$.
2. **Usar identidades notables**: $x^2 - 49 = (x+7)(x-7)$; $x^2 + 10x + 25 = (x+5)^2$.
3. **Buscar raíces enteras** (divisores del término independiente) con Ruffini y repetir el proceso con el cociente.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 1

Factoriza $P(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$.

Los divisores de 6 son $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Probamos $x = -1$: $P(-1) = -1 + 6 - 11 + 6 = 0$. Ruffini con -1 da el cociente $x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$. Por tanto $P(x) = (x+1)(x+2)(x+3)$.

Ejemplo 2

Calcula el resto de $x^3 - 4x + 1$ entre $x - 3$.

Por el teorema del resto: $P(3) = 27 - 12 + 1 = 16$.

Ejemplo 3

Desarrolla $(3x-2)^2 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 2 + 2^2 = 9x^2 - 12x + 4$.

Cómo organizar el trabajo con polinomios

Observación

Ordena siempre los polinomios de mayor a menor grado y deja huecos (coeficiente 0) para los términos que faltan; así evitarás errores al sumar, al multiplicar en columna o al dividir. Cuando restes, escribe los paréntesis y cambia los signos con mucho cuidado. Al multiplicar polinomios, comprueba que obtienes tantos términos como el producto del número de términos de cada factor antes de reducir; después,

comprueba el resultado dando un valor a x (por ejemplo $x = 1$) a ambos lados: tienen que coincidir.

Regla

Los polinomios aparecen en problemas de áreas y volúmenes. Un rectángulo de lados $x + 5$ y $x - 1$ tiene un área $(x + 5)(x - 1) = x^2 + 4x - 5$; para $x = 6$ vale 55 unidades cuadradas, y también $11 \cdot 5 = 55$, lo que confirma el cálculo.

Para qué sirve factorizar

Observación

Factorizar un polinomio permite simplificar expresiones y resolver ecuaciones. Si $P(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$, entonces $P(x) = 0$ solo cuando alguno de los factores vale cero, es decir, para $x = 1$, $x = 2$ o $x = 3$. Esta idea es la base de la resolución de ecuaciones de grado superior a dos y también se utiliza para dibujar gráficas, porque las raíces indican los puntos donde la curva corta al eje horizontal. Conviene practicar con pocos pasos pero muy bien hechos: primero el factor común, luego las identidades notables y, si hace falta, Ruffini probando con los divisores del término independiente (con signo positivo y negativo).

- Sumar términos que no son semejantes: $2x + 3x^2$ no es $5x^3$.
- Olvidar cambiar el signo de todos los términos del paréntesis al restar.
- Escribir $(a + b)^2 = a^2 + b^2$.
- No incluir los ceros de los términos que faltan en Ruffini.
- Dar por terminada una factorización sin comprobar si el cociente se puede seguir factorizando.

Polinomios en problemas de áreas y volúmenes

Método: plantear un problema con polinomios

1. Dibuja la figura y escribe las medidas con la letra x.
2. Escribe la fórmula del área o del volumen con esas medidas.
3. Multiplica y reduce términos semejantes hasta obtener un polinomio ordenado.
4. Sustituye el valor de x y comprueba el resultado calculando directamente con las medidas.

Ejemplo 4

Un rectángulo mide $x + 4$ de largo y $x - 1$ de ancho. Escribe su área y calcula

su valor para $x = 6$.

Área $= (x+4)(x-1) = x^2 - x + 4x - 4 = x^2 + 3x - 4$. Con $x = 6$: $36 + 18 - 4 = 50$. Comprobación con las medidas: $10 \cdot 5 = 50$ unidades cuadradas.

Raíces y factores

Propiedad: raíces y factores

Un número a es raíz de $P(x)$ si $P(a) = 0$. En ese caso $x - a$ es un factor de $P(x)$ y la división por $x - a$ es exacta. Además, un polinomio de grado n tiene como máximo n raíces. Si todas son enteras, el polinomio se factoriza como un producto de n factores de primer grado multiplicado por el coeficiente principal.

Ejemplo 5

Factoriza $x^3 - 7x + 6$.

Probamos los divisores de 6: $P(1) = 1 - 7 + 6 = 0$. Ruffini con $a = 1$ sobre $1,\ 0,\ -7,\ 6$ da $1;\ 1;\ -6;\ 0$, así que el cociente es $x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$. Por tanto $x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x+3)(x-2)$.

Ejemplo 6

Simplifica $\dfrac{x^2 - 9}{x^2 + 6x + 9}$ factorizando numerador y denominador.

El numerador es una diferencia de cuadrados: $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$. El denominador es el cuadrado de una suma: $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$. Simplificamos el factor común $x + 3$ y queda $\dfrac{x-3}{x+3}$, válido siempre que $x \neq -3$. Para comprobarlo, con $x = 1$: $\dfrac{1-9}{1+6+9} = \dfrac{-8}{16} = -\dfrac{1}{2}$ y $\dfrac{1-3}{1+3} = -\dfrac{2}{4} = -\dfrac{1}{2}$. Los dos valores coinciden, así que la simplificación es correcta.

- Olvidar que $-x^2$ y $(-x)^2$ son distintos: $(-3)^2 = 9$, pero $-3^2 = -9$.
- Pensar que $(x-4)^2 = x^2 - 16$: falta el término $-8x$.
- Dividir con Ruffini por $x + 2$ usando $a = 2$: para $x + 2 = x - (-2)$ se usa $a = -2$.

¿Sabías que?

La regla de Ruffini lleva el nombre del matemático italiano Paolo Ruffini, que la publicó en 1809. Antes de los ordenadores, esta tabla era la forma más rápida de dividir polinomios y de buscar raíces. Hoy los polinomios están detrás de las curvas de los

diseños de coches, de las letras de los ordenadores y de los gráficos de los videojuegos.

Repaso guiado: de la expresión al resultado

Método: comprobar cualquier cálculo con polinomios

1. Antes de operar, ordena cada polinomio de mayor a menor grado y deja un hueco (o escribe un cero) donde falte un término.
2. Haz la operación con calma, término a término, y escribe los productos parciales en columnas según el grado.
3. Reduce los términos semejantes y revisa los signos uno por uno, sobre todo cuando hay un signo menos delante de un paréntesis.
4. Elige un valor sencillo de la variable, por ejemplo 1 o 2, y calcula el valor numérico de los datos y del resultado. Si los dos números coinciden, el cálculo es casi seguro correcto.

Ejemplo 7

Calcula $(x-3)^2-(x+1)(x-1)$ y comprueba el resultado para $x=2$.

Desarrollamos primero el cuadrado de una diferencia: $(x-3)^2=x^2-6x+9$. Después el producto de una suma por una diferencia: $(x+1)(x-1)=x^2-1$. Ahora restamos, con mucho cuidado, porque el signo menos afecta a todo el segundo paréntesis: $x^2-6x+9-x^2+1=-6x+10$. Los términos de grado dos se anulan y el resultado es un polinomio de primer grado.

Comprobación con $x=2$: en la expresión inicial obtenemos $(-1)^2-3\cdot 1=1-3=-2$, y en el resultado $-12+10=-2$. Los dos valores coinciden, de modo que el cálculo es correcto.

Observación: cuándo usar cada herramienta

Si el polinomio tiene un factor que se repite en todos los términos, empieza siempre sacando factor común. Si tiene dos términos que son cuadrados con un signo menos entre ellos, piensa en la diferencia de cuadrados. Si tiene tres términos y dos de ellos son cuadrados perfectos, prueba con el cuadrado de una suma o de una diferencia. Y si nada de lo anterior funciona y el grado es tres o más, busca raíces entre los divisores del término independiente y usa la regla de Ruffini. Seguir este orden ahorra mucho tiempo en los exámenes.

El consejo de Otto

Para comprobar una factorización, sustituye un valor sencillo, como $x=1$ o $x=0$, en el polinomio y en el producto: los dos números deben ser iguales.