Soluciones - Polinomios

Curso: 3 Eso

Solución del ejercicio 1

a. Grado 3 (el mayor exponente); coeficiente principal 4; término independiente -7; 4 términos.
b. Grado 4; coeficiente principal -1; término independiente -3; 3 términos (faltan los términos en x^3 y en x, que tienen coeficiente 0).
c. Grado 0; coeficiente principal 7 y término independiente 7; un solo término. Es un polinomio constante.
d. El de mayor grado es $Q(x)$ (grado 4) y el polinomio constante es $R(x)$.

Solución del ejercicio 2

a. $P(0) = 0 - 0 + 0 - 5 = -5$. Todos los términos con la variable valen cero, así que el valor numérico coincide con el término independiente: $P(0) = -5$.
b. $P(1) = 1 - 3 + 2 - 5 = -5$. Como cualquier potencia de 1 vale 1, basta con sumar los coeficientes: $1 - 3 + 2 - 5 = -5$. Por tanto $P(1) = -5$.
c. $P(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 5 = -1 - 3 - 2 - 5 = -11$. Las potencias impares de -1 son negativas y las pares positivas; por eso el cubo da -1 y el cuadrado da $+1$. El valor numérico es $P(-1) = -11$.
d. $P(3) = 27 - 3 \cdot 9 + 6 - 5 = 27 - 27 + 6 - 5 = 1$. Calculamos primero las potencias, $3^3 = 27$ y $3^2 = 9$, y después los productos. El resultado es $P(3) = 1$, el único valor positivo de los cuatro.

Solución del ejercicio 3

a. Sumamos término a término:
$(3 + 1)x^3 + (-2 + 4)x^2 + (1 - 3)x + (-5 + 2) = 4x^3 + 2x^2 - 2x - 3$. Agrupamos cada grado por separado y sumamos sus coeficientes. La suma es $A(x) + B(x) = 4x^3 + 2x^2 - 2x - 3$, un polinomio de grado 3.
b. Cambiamos el signo de todos los términos de B:
$3x^3 - 2x^2 + x - 5 - x^3 - 4x^2 + 3x - 2 = 2x^3 - 6x^2 + 4x - 7$. El error más frecuente es cambiar solo el signo del primer término de B; aquí se cambian los cuatro. La diferencia es $A(x) - B(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4x - 7$.
c. Primero $2A = 6x^3 - 4x^2 + 2x - 10$. Después
$2A - B = 6x^3 - 4x^2 + 2x - 10 - x^3 - 4x^2 + 3x - 2 = 5x^3 - 8x^2 + 5x - 12$.
Comprobamos con $x = 1$: $A(1) = -3$, $B(1) = 4$ y $2 \cdot (-3) - 4 = -10$; en el resultado, $5 - 8 + 5 - 12 = -10$. Por tanto $2A(x) - B(x) = 5x^3 - 8x^2 + 5x - 12$.

Solución del ejercicio 4

a. Coeficientes: $3 \cdot (-5) = -15$. Parte literal: $x^{2+4} = x^6$. Resultado: $-15x^6$. Multiplicamos los coeficientes entre sí y las partes literales entre sí, sumando exponentes. El producto es el monomio $-15x^6$, de grado 6.
b. Aplicamos la propiedad distributiva: $-2x^3 + 8x^2 - 6x$. Multiplicamos $-2x$ por cada término: $-2x \cdot x^2 = -2x^3$, $-2x \cdot (-4x) = +8x^2$ y $-2x \cdot 3 = -6x$. Fíjate en que menos por menos da más. Resultado: $-2x^3 + 8x^2 - 6x$.
c. Desarrollamos cada producto: $12x^3 - 4x^2 - 2x^3 - 5x$. Reducimos: $10x^3 - 4x^2 - 5x$. Los términos semejantes son $12x^3$ y $-2x^3$, que dan $10x^3$; el resto no se puede agrupar. Resultado final: $10x^3 - 4x^2 - 5x$.
d. $6 : 2 = 3$ y $x^{5-2} = x^3$. Resultado: $3x^3$. Al dividir monomios dividimos los coeficientes y restamos los exponentes de la misma base. El cociente es el monomio $3x^3$.

Solución del ejercicio 5

a. $x^2 - 6x + 4x - 24 = x^2 - 2x - 24$. Multiplicamos cada término del primer factor por cada término del segundo: $x \cdot x$, $x \cdot (-6)$, $4 \cdot x$ y $4 \cdot (-6)$. Reducimos $-6x + 4x = -2x$. El producto es $x^2 - 2x - 24$.
b. $2x^3 + 2x^2 - 10x - 3x^2 - 3x + 15 = 2x^3 - x^2 - 13x + 15$. Primero multiplicamos $2x$ por los tres términos y después -3 por los tres términos. Agrupamos $2x^2 - 3x^2 = -x^2$ y $-10x - 3x = -13x$. El producto es $2x^3 - x^2 - 13x + 15$.
c. $x^3 - x^2 + x^2 - x + x - 1 = x^3 - 1$. Los términos intermedios se anulan dos a dos: $-x^2 + x^2 = 0$ y $-x + x = 0$. Por eso el producto es simplemente $x^3 - 1$.
d. Producto: $(2 \cdot 2 - 3)(4 + 2 - 5) = 1 \cdot 1 = 1$. Resultado: $16 - 4 - 26 + 15 = 1$. Coinciden. Calculamos el valor de los dos factores para $x = 2$ y los multiplicamos; luego sustituimos $x = 2$ en el resultado del apartado b). Como en ambos casos obtenemos 1, el desarrollo del apartado b) es correcto.

Solución del ejercicio 6

a. Coeficientes $1,\ 2,\ -5,\ -6$ con $a = 2$: bajamos 1; $1 \cdot 2 = 2$ y $2 + 2 = 4$; $4 \cdot 2 = 8$ y $-5 + 8 = 3$; $3 \cdot 2 = 6$ y $-6 + 6 = 0$. Cociente $x^2 + 4x + 3$ y resto 0.
b. Coeficientes $2,\ -3,\ 1,\ -4$ con $a = 1$: 2; $-3 + 2 = -1$; $1 - 1 = 0$; $-4 + 0 = -4$. Cociente $2x^2 - x$ y resto -4.
c. Coeficientes $1,\ 0,\ 0,\ 0,\ -16$ con $a = -2$: 1; $0 - 2 = -2$; $0 + 4 = 4$; $0 - 8 = -8$; $-16 + 16 = 0$. Cociente $x^3 - 2x^2 + 4x - 8$ y resto 0.

Solución del ejercicio 7

a. $P(2) = 8 - 16 + 2 + 6 = 0$. El resto es 0. Por el teorema del resto, el resto de dividir entre $x - 2$ es $P(2)$. Como vale cero, la división es exacta.
b. $P(-1) = -1 - 4 - 1 + 6 = 0$ y $P(3) = 27 - 36 + 3 + 6 = 0$. Los dos restos son cero. Para $x + 1 = x - (-1)$ usamos $a = -1$, y para $x - 3$ usamos $a = 3$. Ambas divisiones son exactas.
c. Que 2, -1 y 3 son raíces y que $x - 2$, $x + 1$ y $x - 3$ son factores. Como P tiene grado 3: $P(x) = (x - 2)(x + 1)(x - 3)$. Comprobación con $x = 0$: $P(0) = 6$ y $(-2) \cdot 1 \cdot (-3) = 6$. La factorización es correcta.
d. $P(1) = 1 - 4 + 1 + 6 = 4$. El resto es 4, así que $x - 1$ no es factor. Conclusión: de los cuatro divisores probados, solo $x - 1$ no divide a $P(x)$.

Solución del ejercicio 8

a. $x^2 + 2 \cdot x \cdot 7 + 7^2 = x^2 + 14x + 49$. Usamos $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ con $a = x$ y $b = 7$. El doble producto es $14x$. Resultado: $x^2 + 14x + 49$.
b. $(3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 2 + 2^2 = 9x^2 - 12x + 4$. Ahora $a = 3x$ y $b = 2$; hay que elevar al cuadrado todo el monomio, $(3x)^2 = 9x^2$, no solo la x. Resultado: $9x^2 - 12x + 4$.
c. Suma por diferencia: $(2x)^2 - 5^2 = 4x^2 - 25$. La suma por diferencia da la diferencia de los cuadrados, sin término en x. Resultado: $4x^2 - 25$.
d. $5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4x + (4x)^2 = 25 - 40x + 16x^2$. Aquí $a = 5$ y $b = 4x$. Ordenado de mayor a menor grado, el resultado es $16x^2 - 40x + 25$.
e. $98^2 = (100 - 2)^2 = 10\,000 - 400 + 4 = 9\,604$. Usamos el cuadrado de una diferencia con $a = 100$ y $b = 2$: $100^2 = 10\,000$, $2 \cdot 100 \cdot 2 = 400$ y $2^2 = 4$. Por tanto $98^2 = 9\,604$.

Solución del ejercicio 9

a. El factor común es $3x$: $6x^3 - 9x^2 + 3x = 3x(2x^2 - 3x + 1)$. Sacamos el máximo común divisor de los coeficientes (3) y la menor potencia de x (x). El paréntesis aún se puede factorizar: $2x^2 - 3x + 1 = (2x - 1)(x - 1)$, así que $6x^3 - 9x^2 + 3x = 3x(2x - 1)(x - 1)$.
b. Es una diferencia de cuadrados: $x^2 - 8^2 = (x + 8)(x - 8)$. Comprobamos multiplicando: $(x + 8)(x - 8) = x^2 - 64$. Resultado: $(x + 8)(x - 8)$.
c. Es el cuadrado de una suma, porque $2 \cdot x \cdot 5 = 10x$: $(x + 5)^2$. Los extremos son cuadrados, x^2 y 5^2, y el término central es el doble producto con signo más. Resultado: $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$.
d. $(2x)^2 = 4x^2$, $5^2 = 25$ y $2 \cdot 2x \cdot 5 = 20x$: $(2x - 5)^2$. Como el término central es negativo, es el cuadrado de una diferencia. Resultado: $4x^2 - 20x + 25 = (2x - 5)^2$.

Solución del ejercicio 10

a. Los divisores son $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6$. Si P tiene una raíz entera, debe dividir a -6, así que solo hay ocho candidatos que probar.
b. $P(1) = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$. Por tanto $x = 1$ es raíz. El valor numérico es cero, de modo que $x - 1$ es un factor de $P(x)$.
c. Coeficientes $1,\ -6,\ 11,\ -6$: 1; $-6 + 1 = -5$; $11 - 5 = 6$; $-6 + 6 = 0$. Cociente $x^2 - 5x + 6$. El último número es el resto, que vale 0, y los anteriores son los coeficientes del cociente, de grado una unidad menor: $P(x) = (x - 1)(x^2 - 5x + 6)$.
d. $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$, porque $2 + 3 = 5$ y $2 \cdot 3 = 6$. Entonces $P(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$, con raíces 1, 2 y 3. Comprobamos con $x = 0$: $P(0) = -6$ y $(-1)(-2)(-3) = -6$. La factorización es correcta.

Solución del ejercicio 11

a. Área $= (x + 8)(x - 2) = x^2 - 2x + 8x - 16 = x^2 + 6x - 16$. Multiplicamos los dos lados y reducimos $-2x + 8x = 6x$. El área es $A(x) = x^2 + 6x - 16$ metros cuadrados.
b. Perímetro $= 2(x + 8) + 2(x - 2) = 4x + 12$. El perímetro es la suma de los cuatro lados: $2x + 16 + 2x - 4 = 4x + 12$ metros.
c. Con $x = 10$ los lados miden 18 y 8 m. Área: $18 \cdot 8 = 144$ m^2; con el polinomio, $100 + 60 - 16 = 144$ m^2. Perímetro: $40 + 12 = 52$ m. Los dos métodos coinciden, lo que confirma el polinomio del área. La parcela tiene 144 m^2 y 52 m de perímetro.
d. Dos vueltas: $2 \cdot 52 = 104$ m de alambre. Cada vuelta recorre el perímetro completo, por eso se multiplica por 2. Hacen falta 104 metros de alambre.

Solución del ejercicio 12

a. Al añadir 1 m a cada lado, el largo aumenta 2 m y el ancho también: $(x + 8)$ por $(x + 2)$. El paseo añade 1 m por la izquierda y 1 m por la derecha, y lo mismo arriba y abajo. La figura completa mide $x + 8$ m de largo y $x + 2$ m de ancho.
b. Total: $(x + 8)(x + 2) = x^2 + 10x + 16$. Piscina: $x(x + 6) = x^2 + 6x$. Para el total desarrollamos $x^2 + 2x + 8x + 16$ y reducimos. Las áreas son $x^2 + 10x + 16$ (total) y $x^2 + 6x$ (piscina).
c. Paseo $= (x^2 + 10x + 16) - (x^2 + 6x) = 4x + 16$. El área del paseo es la del rectángulo grande menos la de la piscina; los términos en x^2 se anulan. El paseo mide $4x + 16$ m^2.
d. Con $x = 10$: total $= 18 \cdot 12 = 216$ m^2; piscina $= 10 \cdot 16 = 160$ m^2; paseo $= 216 - 160 = 56$ m^2, que coincide con $4 \cdot 10 + 16 = 56$. Conclusión: para $x = 10$, el paseo ocupa 56 m^2, y el cálculo con medidas y con el polinomio da lo mismo.

Solución del ejercicio 13

a. Altura x y base cuadrada de lado $20 - 2x$ (se quitan dos recortes por lado). Al doblar, el lado del recorte se convierte en la altura. Dimensiones: base de $(20 - 2x) \times (20 - 2x)$ cm y altura x cm.
b. $V = x(20 - 2x)^2 = x(400 - 80x + 4x^2) = 4x^3 - 80x^2 + 400x$. Es un polinomio de grado 3. El volumen de un prisma es área de la base por altura. Desarrollamos $(20 - 2x)^2$ con el cuadrado de una diferencia y multiplicamos por x. El volumen es un polinomio de grado 3.
c. $V(3) = 3 \cdot 14^2 = 588$ cm^3 y $V(5) = 5 \cdot 10^2 = 500$ cm^3. Con $x = 3$ la base mide 14 cm y con $x = 5$ mide 10 cm. La primera caja tiene más volumen: 588 cm^3 frente a 500 cm^3.
d. No: con $x = 10$ la base mediría $20 - 20 = 0$ y no habría caja. Debe cumplirse 0. Además x tiene que ser positivo, porque es una longitud. Por tanto $x = 10$ no es posible.

Solución del ejercicio 14

a. $I(x) = 100x - 2x^2$ y $C(x) = 1\,000 - 20x$. Aplicamos la propiedad distributiva en cada producto. Así $I(x) = -2x^2 + 100x$ y $C(x) = -20x + 1\,000$.
b. $B(x) = 100x - 2x^2 - 1\,000 + 20x = -2x^2 + 120x - 1\,000$. Al restar $C(x)$ cambiamos el signo de sus dos términos y agrupamos $100x + 20x = 120x$. El beneficio es $B(x) = -2x^2 + 120x - 1\,000$.
c. $B(20) = -800 + 2\,400 - 1\,000 = 600$ €. Con $I(20) = 20 \cdot 60 = 1\,200$ y $C(20) = 10 \cdot 60 = 600$ se obtiene $1\,200 - 600 = 600$ €. Con el precio de 20 € vende $100 - 40 = 60$ piezas. Los dos métodos dan el mismo resultado: el beneficio es de 600 €.
d. $B(10) = -200 + 1\,200 - 1\,000 = 0$ y $B(50) = -5\,000 + 6\,000 - 1\,000 = 0$. En ambos casos el beneficio es nulo: ni gana ni pierde (son las raíces de B). Con un precio de 10 € cubre justo el coste del material, y con 50 € no vende ninguna pieza. En los dos casos el beneficio es 0 €.

Solución del ejercicio 15

a. Lados $x + 3$ y $x - 2$. Área $= x^2 - 2x + 3x - 6 = x^2 + x - 6$. Un lado crece 3 m y el otro disminuye 2 m. El área del nuevo huerto es $x^2 + x - 6$ m^2.
b. $(x^2 + x - 6) - x^2 = x - 6$. Restamos el área del cuadrado, x^2, al área del rectángulo. La diferencia es $x - 6$ m^2.
c. Con $x = 15$: antiguo 225 m^2 y nuevo $18 \cdot 13 = 234$ m^2. Ha aumentado 9 m^2, igual que $15 - 6 = 9$. El aumento calculado con medidas coincide con el polinomio. El huerto pasa de 225 m^2 a 234 m^2: gana 9 m^2.
d. Es mayor si $x - 6 > 0$, es decir, si $x > 6$. Con $x = 6$ las dos áreas son iguales. Si x , el nuevo huerto sería más pequeño. Respuesta: el huerto nuevo es mayor solo

cuando $x > 6$.

Solución del ejercicio 16

a. Patio: $(x+4)^2 = x^2 + 8x + 16$. Macetas: x^2. Usamos $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ con $a = x$ y $b = 4$; el doble producto es $8x$. El patio mide $x^2 + 8x + 16$ m^2 y las macetas x^2 m^2.
b. Pavimentada $= x^2 + 8x + 16 - x^2 = 8x + 16$. Restamos las dos áreas; los términos en x^2 se anulan. El área pavimentada es $8x + 16$ m^2.
c. $8 \cdot 6 + 16 = 64$ m^2. Comprobación: $10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$ m^2. Con $x = 6$ el patio tiene 10 m de lado y la zona de macetas 6 m. Los dos cálculos coinciden: se pavimentan 64 m^2.
d. $64 \cdot 25 = 1\,600$ €. El coste es el área pavimentada por el precio de cada metro cuadrado. Pavimentar cuesta $1\,600$ €.

Solución del ejercicio 17

a. $V(2) = 8 + 8 - 10 - 6 = 0$, así que $x - 2$ es un factor. Por el teorema del resto, la división de $V(x)$ entre $x - 2$ es exacta.
b. Ruffini con $a = 2$ sobre $1,\ 2,\ -5,\ -6$: 1; 4; 3; 0. Cociente $x^2 + 4x + 3 = (x+1)(x+3)$. Entonces $V(x) = (x-2)(x+1)(x+3)$. Comprobación con $x = 0$: $V(0) = -6$ y $(-2) \cdot 1 \cdot 3 = -6$.
c. Aristas: $x - 2$, $x + 1$ y $x + 3$. Deben ser positivas: la más restrictiva es $x - 2 > 0$, es decir, $x > 2$. Las otras dos aristas son positivas en cuanto $x > 2$.
d. Con el polinomio: $125 + 50 - 25 - 6 = 144$. Con las aristas: $3 \cdot 6 \cdot 8 = 144$. El volumen es 144 m^3. Que las dos formas coincidan confirma la factorización.

Solución del ejercicio 18

a. $x^2 - 14x + 49 = (x-7)^2$, ya que $2 \cdot x \cdot 7 = 14x$ y $7^2 = 49$. El lado mide $x - 7$ metros. Comprobamos desarrollando $(x-7)^2 = x^2 - 14x + 49$.
b. $x^2 - 49 = (x+7)(x-7)$. Puede medir $x + 7$ de largo y $x - 7$ de ancho. Es la suma por diferencia, que siempre da la diferencia de cuadrados.
c. Con $x = 19$: lado de la plaza $= 12$ m; jardín de 26 m por 12 m. Basta sustituir $x = 19$ en cada factor.
d. Plaza: $12^2 = 144$ m^2 y con el polinomio $361 - 266 + 49 = 144$. Jardín: $26 \cdot 12 = 312$ m^2 y $361 - 49 = 312$. Las dos comprobaciones coinciden, así que las factorizaciones son correctas.

Solución del ejercicio 19

a. $P(1) = 1 - 5 + 4 = 0$; $P(-1) = 0$; $P(2) = 16 - 20 + 4 = 0$; $P(-2) = 0$. Como P solo tiene potencias pares, $P(-a) = P(a)$; por eso los valores en -1 y -2 coinciden con los de 1 y 2. Los cuatro valores son cero.
b. $z^2 - 5z + 4 = (z - 1)(z - 4)$, porque $1 + 4 = 5$ y $1 \cdot 4 = 4$. Entonces $P(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$. El cambio $z = x^2$ convierte P en un polinomio de segundo grado más fácil de factorizar.
c. $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$ y $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$. Por tanto $P(x) = (x + 1)(x - 1)(x + 2)(x - 2)$. Cada factor de segundo grado es una diferencia de cuadrados.
d. Las raíces son -2, -1, 1 y 2. Coinciden porque cada una anula uno de los factores y, por tanto, el producto. Respuesta: las raíces son ± 1 y ± 2, y por eso P se anula en los cuatro valores de a).

Solución del ejercicio 20

a. Debe cumplirse $P(2) = 0$: $8 - 2k + 6 = 0$, $2k = 14$, $k = 7$. Por el teorema del resto, $x - 2$ divide al polinomio si y solo si el valor en 2 es cero. Comprobación: $8 - 14 + 6 = 0$. Respuesta: $k = 7$.
b. $P(x) = a(x - 1)(x + 2)(x - 3)$ y $P(0) = a \cdot (-1) \cdot 2 \cdot (-3) = 6a = 12$, así que $a = 2$. Entonces $P(x) = 2(x - 1)(x + 2)(x - 3) = 2x^3 - 4x^2 - 10x + 12$. Un polinomio con esas raíces debe tener los factores $x - 1$, $x + 2$ y $x - 3$; el número a se ajusta con la condición $P(0) = 12$. Comprobación: el término independiente del desarrollo es 12.
c. Por el teorema del resto: $(-1)^5 + 1 = -1 + 1 = 0$. El resto es 0. El resto de dividir entre $x + 1 = x - (-1)$ es el valor del polinomio en -1. Respuesta: $x + 1$ divide exactamente a $x^5 + 1$.
d. $(-1)^{50} - 2 = 1 - 2 = -1$. El resto es -1. Una potencia par de -1 vale 1, así que no hace falta hacer la división larga. Respuesta: el resto es -1.