Apuntes - Números racionales y raíces

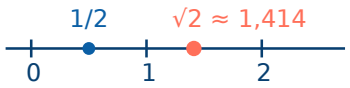
Curso: 3 Eso

En este tema aprenderás: los números racionales, operaciones con fracciones, fracción generatriz, raíces cuadradas e irracionales, notación científica, método para resolver problemas con fracciones y cómo comparar y ordenar números reales. Cada idea va en un cuadro de color, con ejemplos resueltos paso a paso.

Actividad de introducción: el reparto de una pizza

Cuatro amigos de Sevilla piden una pizza grande y la cortan en 8 trozos iguales. Ana se come 3 trozos, Luis 2 y Marta 1. ¿Qué fracción de la pizza se han comido entre los tres? Son $\frac{3}{8}+\frac{2}{8}+\frac{1}{8}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$. Si el cuarto amigo se queda con lo que sobra, le tocan $\frac{1}{4}$, es decir, 2 trozos. Las fracciones sirven para repartir, medir y comparar.

Pero hay números que no se pueden escribir como fracción: si un cuadrado tiene lado 1, su diagonal mide $\sqrt{2}=1{,}41421\ldots$, con infinitas cifras decimales sin ningún período. Los números racionales y los irracionales forman juntos el conjunto de los números reales, que llenan toda la recta numérica. En este tema aprenderás a operar con fracciones, a pasar de decimales a fracciones, a trabajar con raíces y a manejar números muy grandes o muy pequeños con la notación científica.



Los números racionales

Definición: racional

Un número es **racional** si se puede escribir como una fracción $\frac{a}{b}$ con a y b enteros y $b\neq 0$. Los números naturales, los enteros, las fracciones y los decimales exactos o periódicos son racionales. Se representa con la letra $\mathbb{Q}$.

Propiedad

Todo número racional tiene una expresión decimal que puede ser **exacta** ($\frac{3}{8}=0{,}375$), **periódica pura** ( ) o **periódica mixta** ($\frac{7}{12}=0{,}58\overline{3}$).

Operaciones con fracciones

Propiedad: operaciones con fracciones

- **Suma y resta:** se reducen a común denominador (mejor con el mínimo común múltiplo): $\frac{3}{4}+\frac{5}{6}=\frac{9}{12}+\frac{10}{12}=\frac{19}{12}$.
- **Producto:** numerador por numerador y denominador por denominador: $\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{4}=\frac{18}{12}=\frac{3}{2}$.
- **Cociente:** se multiplica por la inversa: $\frac{2}{3}:\frac{4}{5}=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$.

Observación

Con varias operaciones se respeta la jerarquía: primero paréntesis, después potencias y raíces, luego multiplicaciones y divisiones (de izquierda a derecha) y, por último, sumas y restas. Conviene simplificar el resultado hasta obtener una fracción irreducible.

Cómo se hace: sumar y restar fracciones

1. Calcula el mínimo común múltiplo de los denominadores.
2. Pasa cada fracción a ese denominador común.
3. Suma o resta los numeradores y deja el denominador.
4. Simplifica el resultado.

Fracción generatriz

Es la fracción que da origen a un decimal periódico.

Propiedad: fracción generatriz

- **Periódico puro:** el numerador es el periodo y el denominador tiene tantos nueves como cifras tiene el periodo. Ejemplo: .
- **Periódico mixto:** numerador = (número completo sin coma) − (parte que no se repite); denominador = tantos nueves como cifras del periodo seguidos de tantos ceros como cifras del anteperiodo. Ejemplo: $0{,}1\overline{6}=\frac{16-1}{90}=\frac{15}{90}=\frac{1}{6}$.

Cómo se hace: hallar la fracción generatriz de un decimal periódico

1. Llama N al número decimal.
2. Multiplica por una potencia de 10 para que la coma quede justo antes del periodo y otra vez para que quede después.
3. Resta las dos igualdades para eliminar la parte decimal.
4. Despeja N y simplifica la fracción. Por ejemplo, $N=0{,}\overline{3}$: $10N-N=3$, luego $N=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

Raíces cuadradas e irracionales

Propiedad

La raíz cuadrada de $a \geq 0$ es el número positivo b tal que $b^2 = a$. Si a es un cuadrado perfecto ($\sqrt{144} = 12$), la raíz es un número entero. Si no lo es, como $\sqrt{2}$ o $\sqrt{50}$, su expresión decimal tiene infinitas cifras que no se repiten con ningún periodo: es un número **irracional**. Los racionales junto con los irracionales forman los **números reales** $\mathbb{R}$. El número π también es irracional.

Regla

Para aproximar una raíz se buscan los dos cuadrados perfectos entre los que se encuentra y se afina con décimas. Por ejemplo, $7^2 = 49$, y como $7{,}1^2 = 50{,}41$, resulta $7{,}0$.

Observación

Propiedades útiles: $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ y $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$. Gracias a ellas se pueden extraer factores: $\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = 6\sqrt{2}$. La raíz de una suma *no* es la suma de raíces: $\sqrt{9 + 16} = 5 \neq 3 + 4$.

Notación científica

Un número está en notación científica si se escribe $a \cdot 10^n$ con $1 \leq a$ y n entero. Sirve para números muy grandes ($45\,000\,000 = 4{,}5 \cdot 10^7$) o muy pequeños ($0{,}00032 = 3{,}2 \cdot 10^{-4}$).

Propiedad: notación científica

- **Producto:** se multiplican los coeficientes y se suman los exponentes. $(3 \cdot 10^5)(2{,}5 \cdot 10^3) = 7{,}5 \cdot 10^8$.
- **Cociente:** se dividen los coeficientes y se restan los exponentes.
- **Suma y resta:** primero se igualan los exponentes. $3{,}2 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 = 3{,}2 \cdot 10^4 + 0{,}4 \cdot 10^4 = 3{,}6 \cdot 10^4$.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 1

Calcula $\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$.

Primero el producto: $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$. Después la resta: $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$.

Ejemplo 2

Halla la fracción generatriz de $x = 1{,}\overline{3}$.

Multiplicamos por 10: $10x = 13{,}\overline{3}$. Restamos: $10x - x = 13{,}\overline{3} - 1{,}\overline{3} = 12$, así que $9x = 12$ y $x = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$.

Ejemplo 3

Escribe en notación científica $0{,}000\,056 \cdot 4\,000$.

Producto: $5{,}6 \cdot 10^{-5} \cdot 4 \cdot 10^{3} = 22{,}4 \cdot 10^{-2} = 2{,}24 \cdot 10^{-1}$. Comprobación: $0{,}000056 \cdot 4000 = 0{,}224$.

Método para resolver problemas con fracciones

Observación

Muchos problemas de la vida diaria se resuelven con fracciones: repartir una pizza, calcular la parte de una paga que se ha gastado o saber cuánto queda de un depósito. Conviene seguir siempre los mismos pasos. Primero, lee el enunciado y subraya los datos. Segundo, decide si la fracción se aplica sobre el total o sobre lo que queda; no es lo mismo «un tercio de la paga» que «un tercio de lo que sobra». Tercero, calcula con cuidado y simplifica. Cuarto, comprueba que la respuesta tiene sentido: si gastas una fracción menor que uno, lo que queda debe ser menor que el total y mayor que cero.

Regla

Para calcular la fracción de una cantidad se multiplica la fracción por la cantidad: $\frac{3}{5}$ de 40 € son $\frac{3}{5} \cdot 40 = 24$ €. Para saber qué fracción representa una parte del total se divide la parte entre el total: si 12 de 30 alumnos juegan al fútbol, la fracción es $\frac{12}{30} = \frac{2}{5}$.

Cómo comparar y ordenar números reales

Observación

Para comparar fracciones se pueden reducir a común denominador o pasarlas a decimales. Para comparar números de signo distinto basta recordar que todo negativo es menor que todo positivo. Entre dos negativos es mayor el que está más cerca de cero. En la recta numérica los números crecen hacia la derecha. Entre dos racionales distintos siempre hay otro racional (por ejemplo, su media), y también hay infinitos irracionales: por eso se dice que los racionales y los irracionales son **densos** en la recta real.

Regla

Cuando aparecen raíces conviene aproximarlas con dos o tres decimales. Por ejemplo, $\sqrt{2} \approx 1{,}414$ y $\sqrt{3} \approx 1{,}732$, de modo que $\frac{3}{2} = 1{,}5$ queda entre ambas. Recuerda que al redondear se comete un error y que, en los problemas, el resultado debe darse con las unidades y con un número razonable de cifras decimales.

- Sumar numeradores y denominadores: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \neq \frac{2}{5}$.
- Olvidar invertir la segunda fracción al dividir.
- Pensar que $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
- Dejar un coeficiente como 22,4 en notación científica sin ajustar el exponente.
- Creer que $0{,}\overline{9}$ es menor que 1: en realidad es exactamente 1.

Racionales e irracionales en la recta

Propiedad: los números reales

Todo número racional se puede escribir como una fracción y tiene una expresión decimal exacta o periódica. Los números irracionales tienen infinitas cifras decimales sin período: son, por ejemplo, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ y π. Los racionales y los irracionales forman el conjunto de los números reales, y cada punto de la recta numérica corresponde a un número real. Entre dos números reales distintos siempre hay infinitos racionales e infinitos irracionales.

Ejemplo 4

Ordena de menor a mayor $\sqrt{2}$, $\frac{3}{2}$ y $1{,}4$.

Pasamos todo a decimales: $\sqrt{2} \approx 1{,}4142$, $\frac{3}{2} = 1{,}5$ y $1{,}4$. El orden es $1{,}4$.

Cálculo con notación científica

Método: operar con notación científica

1. Para multiplicar, multiplica los coeficientes y suma los exponentes de 10.
2. Para dividir, divide los coeficientes y resta los exponentes.
3. Para sumar o restar, escribe los números con el mismo exponente y opera con los coeficientes.
4. Ajusta el resultado para que el coeficiente quede entre 1 y 10.

Ejemplo 5

Calcula $\dfrac{(4 \cdot 10^{-3}) \cdot (9 \cdot 10^{5})}{6 \cdot 10^{2}}$.

Numerador: $4 \cdot 9 = 36$ y $10^{-3+5} = 10^{2}$, es decir, $36 \cdot 10^{2}$. Dividimos entre $6 \cdot 10^{2}$: $\dfrac{36}{6} = 6$ y $10^{2-2} = 10^{0} = 1$. El resultado es 6.

- Sumar fracciones sumando numeradores y denominadores: $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}$ no es $\dfrac{2}{5}$.
- Pensar que un decimal con muchas cifras es irracional: $0{,}12345$ es racional porque termina.
- Escribir $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$: $\sqrt{9+16} = 5$ y $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 7$.
- Dejar un coeficiente fuera del intervalo $[1, 10)$ en la notación científica, como $12 \cdot 10^{3}$.

¿Sabías que?

Según la tradición, los pitagóricos de la antigua Grecia quedaron muy perturbados cuando descubrieron que la diagonal de un cuadrado no puede medirse con ninguna fracción: la existencia de los irracionales rompía su idea de que «todo es número entero o razón de enteros». Hoy se conocen los primeros billones de cifras de π, y los números enormes y diminutos de la física, como la masa de un electrón, se manejan con la notación científica.

¡Atención!

Para sumar fracciones no se suman los denominadores: $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}$ no es $\dfrac{2}{5}$, sino $\dfrac{5}{6}$.

Antes de sumar o restar hay que reducir a común denominador. En cambio, para multiplicar sí se multiplican numeradores y denominadores directamente, y para dividir se multiplica por la fracción inversa. Simplifica siempre el resultado final dividiendo numerador y denominador por su máximo común divisor.

El consejo de Otto

Antes de calcular, estima: si $\sqrt{50}$ está entre 7 y 8, un resultado de 70 está claramente mal. Una estimación rápida detecta muchos errores de cálculo.