Soluciones - Números racionales y raíces

Curso: 3 Eso

Solución del ejercicio 1

a. $7 \in \mathbb{N}$; $-3 \in \mathbb{Z}$ (es negativo); $\sqrt{16} = 4 \in \mathbb{N}$.

b. Los tres son racionales: $\frac{2}{5}$ es una fracción, $1{,}25 = \frac{5}{4}$ y $0{,}\overline{3} = \frac{1}{3}$ (decimal periódico).

c. Son irracionales: sus decimales son infinitos y no periódicos. ($\sqrt{10} \approx 3{,}1623$ no es una raíz exacta.)

d. No es racional: sus decimales son infinitos y no tienen período (la secuencia de ceros crece), así que es irracional.

Solución del ejercicio 2

a. $\frac{18}{24} = \frac{3}{4}$ (dividiendo entre 6) y $\frac{45}{60} = \frac{3}{4}$ (dividiendo entre 15). Son equivalentes.

b. Común denominador 18: $\frac{15}{18}$ y $\frac{14}{18}$. Como $15 > 14$, $\frac{5}{6} > \frac{7}{9}$.

c. En decimales: $0{,}667$; $0{,}6$ y $0{,}7$. Orden: $\frac{3}{5}$. Respuesta: $\frac{3}{5}$.

d. Por ejemplo $\frac{2}{5} = 0{,}4$, que cumple $0{,}33\ldots$ (también vale $\frac{5}{12}$).

Solución del ejercicio 3

a. $\text{mcm}(3, 4) = 12$: $\frac{8}{12} + \frac{9}{12} = \frac{17}{12}$. Multiplicamos numerador y denominador de cada fracción por el número que convierte su denominador en 12. El resultado ya es irreducible. Respuesta: $\frac{17}{12}$.

b. $\text{mcm}(6, 4) = 12$: $\frac{10}{12} - \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$. Restamos los numeradores y mantenemos el denominador común. Respuesta: $\frac{7}{12}$.

c. $\text{mcm} = 10$: $\frac{6}{10} + \frac{7}{10} - \frac{5}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$. Al final simplificamos dividiendo numerador y denominador entre 2. Respuesta: $\frac{4}{5}$.

d. $2 = \frac{16}{8}$, así que $\frac{16}{8} - \frac{3}{8} = \frac{13}{8}$. Escribimos el número entero como fracción con

denominador 8. Respuesta: $\frac{13}{8}$.

Solución del ejercicio 4

a. $\frac{18}{12} = \frac{3}{2}$. Multiplicamos numeradores, $2 \cdot 9 = 18$, y denominadores, $3 \cdot 4 = 12$, y simplificamos dividiendo entre 6. Respuesta: $\frac{3}{2}$.

b. $\frac{5}{6} \cdot \frac{9}{10} = \frac{45}{60} = \frac{3}{4}$. Para dividir multiplicamos por la inversa de $\frac{10}{9}$, que es $\frac{9}{10}$, y simplificamos entre 15. Respuesta: $\frac{3}{4}$.

c. $-\frac{24}{60} = -\frac{2}{5}$. Un número negativo por uno positivo da negativo; después simplificamos entre 12. Respuesta: $-\frac{2}{5}$.

d. $\frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{6}{20} = -\frac{3}{10}$. Multiplicamos por la inversa del divisor y aplicamos la regla de los signos. Respuesta: $-\frac{3}{10}$.

Solución del ejercicio 5

a. Paréntesis: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$. Producto: $\frac{5}{6} \cdot \frac{6}{5} = 1$. Resta: $\frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$. Respetamos la jerarquía: primero el paréntesis, luego el producto y al final la resta. Respuesta: $-\frac{1}{4}$.

b. Primer paréntesis: $\frac{4}{6} - \frac{3}{6} = \frac{1}{6}$. Segundo: $\frac{3}{12} + \frac{1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$. Cociente: $\frac{1}{6} : \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \cdot 3 = \frac{1}{2}$. Resolvemos cada paréntesis por separado antes de dividir, y para dividir multiplicamos por la inversa. Respuesta: $\frac{1}{2}$.

Solución del ejercicio 6

a. $0{,}75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$. Es un decimal exacto: lo escribimos con denominador 100 y simplificamos entre 25.

b. $x = 0{,}666\ldots$, $10x = 6{,}666\ldots$; restando, $9x = 6$ y $x = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$. Restamos para eliminar la parte decimal infinita. Comprobación: $2 : 3 = 0{,}666\ldots$.

c. $x = 1{,}222\ldots$, $10x = 12{,}222\ldots$; restando, $9x = 11$ y $x = \frac{11}{9}$. Comprobación: $11 : 9 = 1{,}222\ldots$.
d. $x = 2{,}1666\ldots$; $100x = 216{,}666\ldots$ y $10x = 21{,}666\ldots$. Restando, $90x = 195$ y $x = \frac{195}{90} = \frac{13}{6}$. Comprobación: $13 : 6 = 2{,}1666\ldots$.

Solución del ejercicio 7

a. $\sqrt{49} = 7$; $\sqrt{0{,}25} = 0{,}5$; $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$. Buscamos un número que, al cuadrado, dé el radicando: $7^2 = 49$, $0{,}5^2 = 0{,}25$ y $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$.
b. 49, luego 7. 16, luego 4. Buscamos los cuadrados perfectos más cercanos por debajo y por encima del radicando.
c. $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$; $\sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = 3\sqrt{5}$; $\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = 5\sqrt{2}$. Descomponemos el radicando en un cuadrado perfecto por otro número y sacamos la raíz del cuadrado.
d. $\sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 5 \cdot 1{,}4142 = 7{,}07$. Comprobación: $7{,}07^2 \approx 49{,}98$, muy cerca de 50.

Solución del ejercicio 8

a. Redondeo: $3{,}14$. Error absoluto $\approx |3{,}14159 - 3{,}14| = 0{,}00159$. Redondeamos a las centésimas porque la cifra siguiente, 1, es menor que 5.
b. Truncamiento: $1{,}414$. Redondeo: $1{,}414$ (la siguiente cifra es 2, menor que 5). Truncar es cortar sin mirar las cifras siguientes; aquí coincide con redondear.
c. Errores: [redacted] y [redacted]. Es mejor $0{,}333$ (menor error). Cuantas más cifras tomamos de un decimal periódico, menor es el error.
d. $\frac{0{,}00159}{3{,}14159} \approx 0{,}0005 = 0{,}05\ \%$. Respuesta: un error relativo del 0,05 %, muy pequeño.

Solución del ejercicio 9

a. $45\,000\,000 = 4{,}5 \cdot 10^7$ y $0{,}00032 = 3{,}2 \cdot 10^{-4}$. Movemos la coma hasta dejar una sola cifra distinta de cero a su izquierda; si la movemos a la izquierda el exponente es positivo y si la movemos a la derecha es negativo.
b. $6{,}02 \cdot 10^3 = 6\,020$ y $5 \cdot 10^{-4} = 0{,}0005$. Un exponente positivo desplaza la coma a la derecha y uno negativo a la izquierda.
c. $3 \cdot 2 = 6$ y $10^{5+3} = 10^8$: $6 \cdot 10^8$. Multiplicamos las mantisas y sumamos los exponentes de las potencias de 10.

d. $\frac{8}{2} = 4$ y $10^{6-2} = 10^4$: $4 \cdot 10^4$. Dividimos las mantisas y restamos los exponentes. Respuesta: $4 \cdot 10^4 = 40\,000$.

Solución del ejercicio 10

a. Factor $= \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$. Pasamos de 6 a 10 personas, así que multiplicamos todas las cantidades por $\frac{10}{6}$, que se simplifica.
b. Harina: $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{3} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4} = 1{,}25$ kg. Multiplicamos la fracción por el factor y simplificamos. Respuesta: 1,25 kg de harina.
c. Leche: $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3} = \frac{10}{9} \approx 1{,}11$ L. Respuesta: algo más de un litro de leche, $\frac{10}{9}$ L.
d. Azúcar: $\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{6}$ kg, es decir, unos 833 g. Para pasar a gramos multiplicamos por 1 000: $\frac{5\,000}{6} \approx 833$. Respuesta: unos 833 g de azúcar.

Solución del ejercicio 11

a. $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} + \frac{2}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$. Resto: $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.
b. Sueño: $24 \cdot \frac{1}{3} = 8$ h. Instituto: $24 \cdot \frac{1}{4} = 6$ h. Ocio: $24 \cdot \frac{1}{6} = 4$ h. Otras cosas: $24 \cdot \frac{1}{4} = 6$ h. Cada fracción de 24 se calcula dividiendo entre el denominador.
c. $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$: la mitad del día.
d. $8 + 6 + 4 + 6 = 24$ horas. Respuesta: el reparto es correcto.

Solución del ejercicio 12

a. Primero: $\frac{1}{6}$ por hora. Segundo: $\frac{1}{4}$ por hora. Cada grifo llena la piscina entera en su tiempo, así que en una hora llena la fracción inversa.
b. $\frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{2}{12} + \frac{3}{12} = \frac{5}{12}$ de la piscina por hora. Sumamos las dos fracciones reduciendo a común denominador.
c. Tiempo $= 1 : \frac{5}{12} = \frac{12}{5}$ horas $= 2{,}4$ h. El tiempo total es la unidad dividida entre lo que llenan en una hora.
d. $2{,}4$ h $= 2$ h y $0{,}4 \cdot 60 = 24$ min: 2 horas y 24 minutos. Respuesta: tardan 2 horas y

24 minutos.

Solución del ejercicio 13

a. $150\,000\,000$ km y $300\,000$ km/s.

b. $t = \dfrac{1{,}5 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^5} = 0{,}5 \cdot 10^3 = 5 \cdot 10^2 = 500$ s. Dividimos las mantisas y restamos los exponentes.

c. 500 s $= 8$ min y 20 s.

d. $t = \dfrac{1{,}5 \cdot 10^8}{30} = 5 \cdot 10^6$ s. Un día tiene $86\,400$ s: $\dfrac{5 \cdot 10^6}{86\,400} \approx 57{,}9$ días. Respuesta: casi dos meses.

Solución del ejercicio 14

a. $48\,000\,000$ habitantes y $506\,000$ km^2. Desplazamos la coma tantos lugares como indica el exponente.

b. $\dfrac{4{,}8 \cdot 10^7}{5{,}06 \cdot 10^5} \approx 0{,}949 \cdot 10^2 \approx 94{,}9$ hab/km^2. La densidad es el número de habitantes dividido entre la superficie.

c. $\dfrac{2{,}4 \cdot 10^5}{8 \cdot 10^2} = 0{,}3 \cdot 10^3 = 300$ hab/km^2. Dividimos mantisas y restamos exponentes.

d. $\dfrac{300}{94{,}9} \approx 3{,}2$ veces mayor. Respuesta: la isla está unas 3,2 veces más poblada por km^2.

Solución del ejercicio 15

a. $1 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{6}{6} - \dfrac{3}{6} - \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{6}$. Restamos a la unidad las fracciones que reciben los otros dos.

b. Mayor: $120\,000 \cdot \dfrac{1}{2} = 60\,000$ €. Mediano: $\dfrac{120\,000}{3} = 40\,000$ €. Pequeño: $\dfrac{120\,000}{6} = 20\,000$ €.

c. $60\,000 - 20\,000 = 40\,000$ €, que es $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{3}$ del total.

d. $60\,000 + 40\,000 + 20\,000 = 120\,000$ €. Respuesta: se reparten los 120 000 €.

Solución del ejercicio 16

a. Lunes: $1\,200 \cdot \frac{1}{5} = 240$ L. Martes: $1\,200 \cdot \frac{1}{4} = 300$ L. La fracción del lunes y la del martes se aplican al total de 1 200 litros.
b. $1\,200 - 240 - 300 = 660$ L.
c. Miércoles: $660 \cdot \frac{1}{3} = 220$ L. La fracción del miércoles se aplica a lo que quedaba, no al total.
d. Quedan $660 - 220 = 440$ L, que son $\frac{440}{1\,200} = \frac{11}{30}$ del depósito. Respuesta: quedan 440 litros.

Solución del ejercicio 17

a. Lado $= \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7{,}07$ m (irracional). El lado de un cuadrado es la raíz cuadrada de su área.
b. Perímetro $= 4 \cdot 5\sqrt{2} = 20\sqrt{2} \approx 28{,}28$ m.
c. Diagonal $= \sqrt{50 + 50} = \sqrt{100} = 10$ m (un número racional, aunque el lado no lo sea).
d. $28{,}28 \cdot 12 \approx 339{,}36$ €. Respuesta: vallar el solar cuesta unos 339 €.

Solución del ejercicio 18

a. $160 \cdot \frac{3}{8} = 60$ km. Calculamos la fracción de 160 dividiendo entre 8 y multiplicando por 3.
b. $160 \cdot \frac{1}{4} = 40$ km.
c. $1 - \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{8}{8} - \frac{3}{8} - \frac{2}{8} = \frac{3}{8}$. Son 60 km. Restamos a la unidad las fracciones ya recorridas.
d. $\frac{60}{80} = \frac{3}{4}$ de hora, es decir, 45 minutos. El tiempo es la distancia entre la velocidad. Respuesta: 45 minutos.

Solución del ejercicio 19

a. Como 1 m $= 10^3$ mm: célula $= 2 \cdot 10^{-2}$ mm; glóbulo rojo $= 7 \cdot 10^{-3}$ mm.
b. $\frac{1}{2 \cdot 10^{-2}} = 0{,}5 \cdot 10^2 = 50$ células. Dividimos 1 mm entre el tamaño de una célula.
c. $\frac{1}{7 \cdot 10^{-3}} = \frac{10^3}{7} \approx 1{,}43 \cdot 10^2 \approx 143$ glóbulos rojos.

d. $\dfrac{2 \cdot 10^{-5}}{7 \cdot 10^{-6}} = \dfrac{20}{7} \approx 2{,}86$ veces. Respuesta: la célula es casi tres veces mayor.

Solución del ejercicio 20

a. $x = 0{,}999\ldots$ y $10x = 9{,}999\ldots$. Restando: $9x = 9$, luego $x = 1$. Por eso un número no puede tener dos expresiones decimales distintas salvo en este caso.

b. $\sqrt{5} \approx 2{,}236$: está entre 2 y 3 (4) y no es una raíz exacta de ningún racional, así que es irracional. Si fuera racional, su cuadrado sería el cuadrado de una fracción, y 5 no lo es.

c. Suma por diferencia: $(\sqrt{3})^2 - 1^2 = 3 - 1 = 2$. El resultado es racional aunque los factores no lo sean.

d. $\sqrt{\dfrac{4}{9}} = \dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \dfrac{2}{3}$. Sí es racional. La raíz de un cociente es el cociente de las raíces.