Apuntes - Inecuaciones

Curso: 3 Eso

En este tema aprenderás: desigualdades y sus propiedades, intervalos y semirrectas, inecuaciones de primer grado con una incógnita, sistemas de inecuaciones, problemas con inecuaciones y cómo representar y comprobar la solución. Cada idea va en un cuadro de color, con ejemplos resueltos paso a paso.

Actividad de introducción: ¿cuántas entradas puedo comprar?

Irene va a un concierto en Granada con 50 € en el bolsillo. La entrada cuesta 18 € y quiere comprar el mayor número posible de entradas para ir con sus amigos. Con 2 entradas gasta 36 €, con 3 gastaría 54 €, que ya es más de lo que tiene. Esta situación no se describe con una igualdad, porque Irene no tiene que gastar exactamente 50 €, sino «como máximo 50 €»: $18x \leq 50$. Resolverla da $x \leq 2{,}77$, y como el número de entradas es entero, solo puede comprar 2. Las inecuaciones aparecen siempre que hay un límite o una condición mínima: presupuestos, velocidades máximas, notas para aprobar, capacidad de un ascensor o edad para entrar en un sitio. Su solución no es un número, sino un conjunto de números que se escribe con desigualdades o con intervalos.



Desigualdades y sus propiedades

Propiedad: desigualdades y sus propiedades

Una **desigualdad** compara dos expresiones con los signos (menor que), $>$ (mayor que), $\leq$ (menor o igual que) y $\geq$ (mayor o igual que). Se cumplen las siguientes propiedades:

- Si se suma o resta el mismo número a los dos miembros, la desigualdad se mantiene: a.
- Si se multiplica o divide por un número **positivo**, la desigualdad se mantiene.
- Si se multiplica o divide por un número **negativo**, la desigualdad **cambia de sentido**: 3 pero $-6 > -10$ al multiplicar por -2.

Intervalos y semirrectas

Propiedad: intervalos y semirrectas

Las soluciones de una inecuación suelen ser infinitas y se expresan con **intervalos**:

- (a, b) o intervalo abierto: a (no incluye los extremos).

- $[a, b]$ o intervalo cerrado: $a \leq x \leq b$ (incluye los extremos).
- $[a, b)$ y $(a, b]$: semiabiertos.
- $(a, +\infty)$: $x > a$, y $[a, +\infty)$: $x \geq a$.
- $(-\infty, b)$: x, y $(-\infty, b]$: $x \leq b$.

Regla

En la recta numérica se marca un punto vacío (círculo abierto) si el extremo no está incluido y un punto relleno si lo está. Los símbolos $\pm\infty$ siempre llevan paréntesis, porque infinito no es un número y no se puede alcanzar.

Inecuaciones de primer grado con una incógnita

Definición: inecuación

Una **inecuación** es una desigualdad con una incógnita. Para resolver una de primer grado se procede igual que con una ecuación, con la única precaución de cambiar el sentido de la desigualdad al multiplicar o dividir por un negativo:

1. Quitar paréntesis y denominadores (multiplicando por un mcm positivo).
2. Pasar los términos con x a un lado y los números al otro.
3. Reducir y despejar x; si el coeficiente es negativo, invertir el signo de la desigualdad.
4. Escribir la solución como intervalo y representarla.

Ejemplo 1

$5 - 3x \leq 14$.

Restamos 5: $-3x \leq 9$. Dividimos entre -3 e invertimos: $x \geq -3$. Solución: $[-3, +\infty)$.

Ejemplo 2

Con denominadores: $\frac{x+1}{2} \geq \frac{x-3}{3}$.

Multiplicando por 6: $3(x+1) \geq 2(x-3)$, $3x + 3 \geq 2x - 6$, $x \geq -9$.

Hay inecuaciones sin solución, como $x + 1$ (equivale a 1, falso), y otras que se cumplen para todos los números reales, como $2x + 3 > 2x$ (equivale a $3 > 0$, verdadero).

Cómo se hace: resolver una inecuación de primer grado

1. Quita paréntesis y denominadores (multiplicando por un número positivo).
2. Pasa los términos con x a un miembro y los números al otro.
3. Reduce y despeja x; si divides o multiplicas por un número negativo, invierte el sentido de la desigualdad.
4. Escribe la solución como desigualdad, intervalo y semirrecta.

Sistemas de inecuaciones

Propiedad

Un sistema de inecuaciones exige que se cumplan todas a la vez. Se resuelve cada inecuación y se hace la **intersección** de las soluciones. Por ejemplo, $x + 2 > 1$ da $x > -1$ y $2x - 1 \leq 7$ da $x \leq 4$. La solución común es $(-1, 4]$. Si las soluciones no tienen puntos comunes, el sistema no tiene solución: $x \geq 2$ y x es imposible. Una doble desigualdad como 2 se resuelve restando 3 a las tres partes: -1.

Problemas con inecuaciones

Regla

Las inecuaciones se usan cuando hay un mínimo o un máximo, o cuando se comparan dos opciones. Se traduce «al menos» por $\geq$, «como máximo» por $\leq$, «más de» por $>$ y «menos de» por . Después se resuelve y se interpreta teniendo en cuenta el contexto: si la incógnita cuenta objetos o personas, solo sirven números naturales.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 3

Una tarifa A cobra 12 € fijos más 0,04 € por minuto y la tarifa B cobra 0,10 € por minuto. ¿Cuándo es más barata A?

$12 + 0{,}04m$. A es más barata a partir de más de 200 minutos.

Ejemplo 4

Una alumna ha sacado 4,5 y 6 en dos exámenes. ¿Qué nota necesita en el tercero para tener una media de al menos 5?

$\frac{4{,}5+6+x}{3} \geq 5 \Rightarrow 10{,}5 + x \geq 15 \Rightarrow x \geq 4{,}5$.

Ejemplo 5

Enteros que cumplen -3: sumando 1, -2; dividiendo entre 2, -1. Los enteros son 0, 1, 2 y 3.

Cómo representar y comprobar la solución

Regla

Para dibujar la solución de $x > 4$ se traza la recta numérica, se marca el 4 con un punto vacío y se colorea la semirrecta hacia la derecha. Para $x \leq 3$ se marca el 3 con un punto relleno y se colorea hacia la izquierda. En un sistema se dibuja cada solución en una recta distinta, una debajo de otra, y la solución final es la zona en la que coinciden las dos. Este dibujo ayuda a ver enseguida si hay solución o no.

Regla

La comprobación es sencilla: elige un número que esté dentro de la solución y sustitúyelo en la inecuación original; debe dar una desigualdad verdadera. Después elige otro de fuera y comprueba que da una desigualdad falsa. Si la solución es $x \geq -3$, el número 0 debe cumplirla ($5 - 0 \leq 14$, cierto) y el número -5 no ($5 + 15 = 20 \leq 14$, falso). Con este método detectarás de inmediato si olvidaste invertir el signo de la desigualdad.

Observación

Recuerda que la solución de una inecuación de primer grado casi siempre es una semirrecta, es decir, infinitos números, a diferencia de las ecuaciones, que suelen tener una sola solución. Por eso en los problemas conviene pensar qué valores tienen sentido: el número de bolígrafos, de viajes o de personas debe ser un entero positivo.

- No invertir el signo al dividir o multiplicar por un número negativo.
- Incluir el extremo en un intervalo abierto o viceversa.
- Escribir corchetes con el infinito.
- Dar la solución de un sistema como unión de las soluciones, en lugar de la intersección.
- Olvidar interpretar el resultado en el contexto del problema (por ejemplo, 20,67 bolígrafos no existen).

Cuando el sentido cambia

Regla: multiplicar o dividir por un número negativo

Si multiplicas o divides los dos miembros de una desigualdad por un número **negativo**, el sentido de la desigualdad cambia: $>$ pasa a , y $\leq$ pasa a $\geq$. Si el número es positivo, el sentido se mantiene. Sumar o restar el mismo número en los dos miembros nunca cambia el sentido.

Ejemplo 6

Resuelve $7 - 2x \geq 1$.

Restamos 7: $-2x \geq -6$. Dividimos entre -2, que es negativo, y cambiamos el sentido:

$x \leq 3$. La solución es el intervalo $(-\infty, 3]$. Comprobación con $x = 0$: $7 \geq 1$ (cierto). Con $x = 4$: $-1 \geq 1$ (falso).

Soluciones enteras y problemas

Método: resolver un problema con inecuaciones

1. Define la incógnita con su significado y sus unidades.
2. Traduce las palabras «como máximo», «al menos», «no supera» o «más de» al signo correspondiente: $\leq$, $\geq$, $\leq$, $>$.
3. Resuelve la inecuación y escribe la solución como intervalo.
4. Elige, entre los valores del intervalo, los que tienen sentido en el problema (por ejemplo, los enteros) y comprueba.

Ejemplo 7

Un autobús cobra 4 € de salida y 0,60 € por parada. ¿Cuántas paradas puedes hacer con 10 €?

$4 + 0{,}6x \leq 10$, $0{,}6x \leq 6$, $x \leq 10$. Puedes hacer como máximo 10 paradas, y con 10 gastas exactamente los 10 €.

- Olvidar cambiar el sentido al dividir entre un número negativo.
- Usar un corchete donde corresponde un paréntesis: $(2, 5]$ no incluye el 2 pero sí el 5.
- Poner corchete en ∞: el infinito nunca se alcanza.
- Dar como respuesta un decimal cuando la incógnita representa personas u objetos: hay que elegir un entero.

¿Sabías que?

Los símbolos y $>$ los introdujo el matemático inglés Thomas Harriot, y se publicaron después de su muerte, en 1631. Los símbolos $\leq$ y $\geq$ aparecieron más tarde. Antes se escribía todo con palabras, lo que hacía muy lento resolver inecuaciones. Hoy se usan en programación, en economía y en la ingeniería para marcar los límites seguros de un sistema.

Observación: palabras que esconden una desigualdad

En los problemas, la desigualdad casi nunca aparece escrita con símbolos. «Como máximo», «no supera» y «no más de» se traducen por $\leq$. «Al menos», «como mínimo» y «no menos de» se traducen por $\geq$. «Más que» y «supera» se escriben con $>$, y «menos que» con . Cuando la incógnita representa personas, entradas o

semanas, la solución debe ser un número entero: hay que redondear hacia el entero que siga cumpliendo la desigualdad, no simplemente al más cercano.

El consejo de Otto

Comprueba la solución con un número de dentro del intervalo y otro de fuera: el de dentro debe cumplir la inecuación original y el de fuera, no.