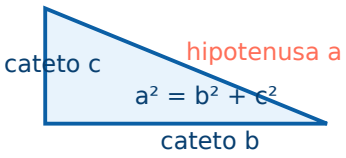
Apuntes - Congruencia, semejanza y Pitágoras

Curso: 3 Eso

En este tema aprenderás: figuras congruentes, figuras semejantes, teorema de Tales, escalas, teorema de Pitágoras, aplicaciones del teorema y cómo resolver un problema geométrico. Cada idea va en un cuadro de color, con ejemplos resueltos paso a paso.

Actividad de introducción: la escalera de la fachada

Unos pintores de Valladolid necesitan una escalera para llegar a una ventana situada a 6 m de altura. Si el suelo está a 2,5 m de la fachada, ¿qué longitud mínima debe tener la escalera? No hace falta medir con una cinta: el triángulo que forman la pared, el suelo y la escalera es rectángulo, y su hipotenusa se calcula con el teorema de Pitágoras. Otro día quieren conocer la altura de un edificio sin subir. Colocan una vara de 1,5 m y miden las sombras: como los rayos del sol son paralelos, los triángulos formados por la vara y el edificio son semejantes, y las proporciones permiten hallar la altura. Congruencia, semejanza y Pitágoras son los tres pilares de la geometría del plano, y se usan en la construcción, en la cartografía y en el diseño de planos y maquetas.



Figuras congruentes

Definición: congruentes

Dos figuras son **congruentes** si tienen la misma forma y el mismo tamaño: se pueden superponer mediante un movimiento (giro, traslación o simetría). Sus lados y ángulos correspondientes son iguales. Para saber si dos triángulos son congruentes basta comprobar uno de estos **criterios**:

- **LLL:** los tres lados son iguales.
- **LAL:** dos lados y el ángulo comprendido entre ellos son iguales.
- **ALA:** un lado y los dos ángulos adyacentes son iguales.

Figuras semejantes

Definición: semejantes

Dos figuras son **semejantes** si tienen la misma forma aunque distinto tamaño: sus

ángulos son iguales y sus lados correspondientes son proporcionales. El cociente entre lados correspondientes es la **razón de semejanza** k. Para triángulos hay tres criterios:

- **AA:** dos ángulos iguales (el tercero lo es también).
- **LAL:** dos lados proporcionales y el ángulo comprendido igual.
- **LLL:** tres lados proporcionales.

Propiedad

Si la razón de semejanza es k, entonces las longitudes (lados, perímetros) se multiplican por k, las **áreas** por k^2 y los **volúmenes** por k^3. Por ejemplo, si un triángulo con lados 3, 4 y 5 se amplía con $k = 3$, sus lados son 9, 12 y 15, su perímetro pasa de 12 a 36 y su área de 6 a 54 ($6 \cdot 9$).

Teorema de Tales

Observación

Si varias rectas paralelas cortan a dos rectas secantes, los segmentos determinados en una son proporcionales a los correspondientes en la otra: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. De aquí se deduce que un triángulo y otro más pequeño formado por una paralela a uno de sus lados son semejantes. Gracias a ello se puede medir la altura de un árbol con su sombra: si una persona de 1,80 m proyecta 2,4 m de sombra y el árbol proyecta 10 m, su altura es $\frac{1{,}8}{2{,}4} = \frac{h}{10}$, es decir, $h = 7{,}5$ m.

Cómo se hace: calcular una longitud con el teorema de Tales

1. Dibuja las rectas paralelas y marca los segmentos que se corresponden.
2. Escribe la proporción entre segmentos correspondientes, por ejemplo $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$.
3. Sustituye los datos conocidos y deja la incógnita sola.
4. Comprueba que el resultado es razonable y escribe las unidades.

Escalas

Definición: escala

La **escala** de un mapa o plano es la razón entre una longitud en el dibujo y la real. En una escala 1:50 000, 1 cm del mapa son 50 000 cm = 500 m reales. Con la escala 1:50 000, 3,5 cm del mapa equivalen a $3{,}5 \cdot 50\,000 = 175\,000$ cm = 1,75 km. Una sala de 5 m por 4 m en un plano a escala 1:200 se dibuja de 2,5 cm por 2 cm.

Teorema de Pitágoras

En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa (el lado opuesto al ángulo recto) es igual a la suma de los cuadrados de los catetos:

Propiedad

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Propiedad

Se usa para calcular un lado desconocido. Con catetos 6 y 8: $a = \sqrt{36 + 64} = 10$. Con hipotenusa 13 y un cateto 5: $c = \sqrt{169 - 25} = 12$. Si los tres lados de un triángulo cumplen $a^2 = b^2 + c^2$, el triángulo es rectángulo (**recíproco**): $7, 24, 25$ cumple $49 + 576 = 625$; en cambio $4, 5, 6$ no, porque $16 + 25 = 41 \neq 36$. Las ternas enteras como $3, 4, 5$, $5, 12, 13$ o $8, 15, 17$ se llaman ternas pitagóricas.

Cómo se hace: hallar un lado con Pitágoras

1. Comprueba que el triángulo es rectángulo e identifica la hipotenusa (el lado opuesto al ángulo recto).
2. Escribe $a^2 = b^2 + c^2$ con a la hipotenusa.
3. Despeja el lado que falta: hipotenusa con una suma, cateto con una resta.
4. Extrae la raíz cuadrada y escribe las unidades.

Aplicaciones del teorema

Propiedad: aplicaciones del teorema

- **Diagonal de un rectángulo** de lados a y b: $d = \sqrt{a^2 + b^2}$. Si mide 9 por 12, $d = 15$.
- **Diagonal de un cuadrado** de lado l: $d = l\sqrt{2}$.
- **Altura de un triángulo isósceles** con lados iguales 10 y base 12: $h = \sqrt{100 - 36} = 8$, y su área es $\frac{12 \cdot 8}{2} = 48$.
- **Distancia entre dos puntos** (x_1, y_1) y (x_2, y_2): $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.
- **Diagonal de un ortoedro** de aristas a, b, c: $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Con 3, 4 y 12: $D = 13$.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 1

Una escalera de 5 m se apoya en una pared con la base a 3 m de ella.

Altura alcanzada: $\sqrt{25-9}=4$ m.

Ejemplo 2

Dos triángulos tienen ángulos 40°, 60° y 80° y 80°, 40° y 60°.

Son semejantes por el criterio AA.

Ejemplo 3

Un cubo de 3 cm de arista tiene volumen 27 cm^3.

Con arista doble ($k=2$), el volumen es $27\cdot 8=216$ cm^3.

Cómo resolver un problema geométrico

Observación

Ante un problema, lo primero es hacer un dibujo claro y rotular los datos. Después hay que buscar un triángulo rectángulo (para usar Pitágoras) o dos triángulos con la misma forma (para usar semejanza o Tales). Escribe la relación que corresponde, sustituye los datos y despeja la incógnita. Al final comprueba que el resultado es razonable: una hipotenusa debe ser mayor que cada cateto, y una altura real no puede ser mayor que el lado inclinado. Responde siempre con las unidades correctas, teniendo en cuenta que las áreas se miden en unidades cuadradas y los volúmenes en unidades cúbicas.

- Aplicar Pitágoras a triángulos que no son rectángulos.
- Sumar los cuadrados cuando se busca un cateto (hay que restar).
- Multiplicar las áreas por k en lugar de k^2.
- Olvidar la raíz cuadrada al final: $a^2=100$ no es $a=100$.
- Emparejar mal los lados correspondientes en triángulos semejantes.

Teorema de Pitágoras y su recíproco

Regla: recíproco del teorema de Pitágoras

Si en un triángulo de lados a, b y c (con a el mayor) se cumple $a^2=b^2+c^2$, entonces el triángulo es rectángulo. Si $a^2>b^2+c^2$ el triángulo es obtusángulo y si a^2 es acutángulo. Así se comprueba si una esquina es recta: el carpintero que usa la terna 3–4–5 sabe que el ángulo es de 90°.

Ejemplo 4

Clasifica el triángulo de lados 5, 6 y 8 según sus ángulos.

El lado mayor es 8: $8^2 = 64$ y $5^2 + 6^2 = 25 + 36 = 61$. Como $64 > 61$, el triángulo es obtusángulo.

Figuras semejantes y escalas

Propiedad: razón de semejanza

Si dos figuras son semejantes con razón k, las longitudes se multiplican por k, las áreas por k^2 y los volúmenes por k^3. En una escala $1 : E$, la razón es $k = \dfrac{1}{E}$ para longitudes, $\dfrac{1}{E^2}$ para áreas y $\dfrac{1}{E^3}$ para volúmenes.

Ejemplo 5

Una maqueta a escala $1 : 50$ mide 24 cm de altura. ¿Cuál es la altura real?

$24 \cdot 50 = 1\,200$ cm $= 12$ m. Si la maqueta tiene una fachada de $0{,}5$ m^2, la fachada real tiene $0{,}5 \cdot 50^2 = 1\,250$ m^2.

- Aplicar Pitágoras en un triángulo que no es rectángulo.
- Sumar los catetos en lugar de sus cuadrados: $a \neq b + c$.
- Multiplicar el área por k en lugar de por k^2.
- Colocar los lados en orden distinto al correspondiente al escribir una proporción de Tales.

¿Sabías que?

Los antiguos agrimensores egipcios usaban cuerdas con 12 nudos equidistantes para trazar ángulos rectos: formaban un triángulo de lados 3, 4 y 5. Tales de Mileto, en el siglo VI antes de Cristo, midió la altura de la gran pirámide comparando su sombra con la de una vara. Con estas ideas se construyeron mapas, edificios y barcos.

Medir lo que no se puede medir

Ejemplo 6

Una cometa está sujeta con un hilo tenso de 25 m. Un alumno se coloca justo debajo de la cometa, a 15 m de la persona que sujeta el hilo. ¿A qué

altura vuela la cometa (sin contar la estatura de quien la sujeta)?

El hilo, el suelo y la vertical que baja desde la cometa forman un triángulo rectángulo. El hilo es la hipotenusa, porque está enfrente del ángulo recto, y los 15 m del suelo son un cateto. Aplicamos el teorema de Pitágoras para despejar el otro cateto: $h = \sqrt{25^2 - 15^2} = \sqrt{625 - 225} = \sqrt{400} = 20$ m. La cometa vuela a 20 m de altura.

¡Atención!

En el teorema de Pitágoras, la hipotenusa es siempre el lado mayor y está enfrente del ángulo recto. Si buscas un cateto, tienes que restar los cuadrados, no sumarlos. Y en los problemas de escalas, recuerda que las áreas no se multiplican por la escala, sino por su cuadrado.

El consejo de Otto

La hipotenusa es siempre el lado más largo del triángulo rectángulo. Si al calcular obtienes una hipotenusa más corta que un cateto, has restado en lugar de sumar.