Soluciones - Congruencia, semejanza y Pitágoras

Curso: 3 Eso

Solución del ejercicio 1

a. Criterio LAL: dos lados y el ángulo comprendido iguales.
b. Sí: criterio LLL (los tres lados son iguales).
c. Sí: criterio ALA (dos ángulos y el lado comprendido iguales); el tercer ángulo es $180^\circ - 50^\circ - 60^\circ = 70^\circ$ en los dos.
d. No: tres ángulos iguales (AAA) no bastan. Un triángulo de lados 3, 4, 5 y otro de 6, 8, 10 tienen los mismos ángulos y no son congruentes (son semejantes).

Solución del ejercicio 2

a. $k = \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \frac{10}{5} = 2$. Dividimos cada lado del triángulo grande entre su correspondiente del pequeño; los tres cocientes valen lo mismo.
b. Perímetros: $3 + 4 + 5 = 12$ y $6 + 8 + 10 = 24$. El segundo es el doble ($k = 2$).
c. Áreas: $\frac{3 \cdot 4}{2} = 6$ y $\frac{6 \cdot 8}{2} = 24$. Cada triángulo es rectángulo, así que su área es el producto de los catetos dividido entre 2.
d. $\frac{24}{6} = 4 = 2^2 = k^2$: el área se multiplica por 4. Respuesta: el área del triángulo grande es 4 veces la del pequeño.

Solución del ejercicio 3

a. $k = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Dividimos el lado menor del segundo entre el lado menor del primero.
b. $9 \cdot \frac{2}{3} = 6$ cm y $12 \cdot \frac{2}{3} = 8$ cm. Multiplicamos cada lado del primer triángulo por la razón k.
c. Primero: $6 + 9 + 12 = 27$ cm. Segundo: $4 + 6 + 8 = 18$ cm ($27 \cdot \frac{2}{3} = 18$). El perímetro también se multiplica por k.
d. $k^2 = \frac{4}{9}$: el área del segundo es $\frac{4}{9}$ del área del primero.

Solución del ejercicio 4

a. $x = \frac{4 \cdot 9}{6} = 6$. Multiplicamos en cruz y despejamos x. Comprobación: $\frac{6}{9} = \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$. Respuesta: $x = 6$.

b. $x = \frac{5 \cdot 14}{10} = 7$. Multiplicamos en cruz: $10x = 5 \cdot 14 = 70$. Comprobación: $\frac{5}{7} = \frac{10}{14}$. Respuesta: $x = 7$.

c. $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$: $\frac{3}{2} = \frac{4{,}5}{EC}$, $EC = \frac{2 \cdot 4{,}5}{3} = 3$. Como DE es paralela a BC, el teorema de Tales asegura que los segmentos de los dos lados son proporcionales. Respuesta: $EC = 3$.

d. $AB = 5$ y $AC = 7{,}5$: $\frac{3}{5} = 0{,}6$ y $\frac{4{,}5}{7{,}5} = 0{,}6$. Coinciden. Respuesta: la proporción se cumple, así que $EC = 3$ es correcto.

Solución del ejercicio 5

a. $\frac{3}{5} = \frac{6}{x}$. Por el teorema de Tales, los segmentos correspondientes de las dos transversales son proporcionales.

b. $x = \frac{5 \cdot 6}{3} = 10$ cm. Multiplicamos en cruz: $3x = 30$. Respuesta: el segundo segmento mide 10 cm.

c. Primera: $3 + 5 = 8$ cm. Segunda: $6 + 10 = 16$ cm. Sumamos los dos segmentos de cada transversal.

d. $\frac{16}{8} = 2$. Respuesta: la segunda transversal mide el doble que la primera, igual que cada pareja de segmentos ($6 : 3 = 10 : 5 = 2$).

Solución del ejercicio 6

a. $4 \cdot 50\,000 = 200\,000$ cm $= 2$ km.

b. 15 km $= 1\,500\,000$ cm; $\frac{1\,500\,000}{50\,000} = 30$ cm.

c. $5 \cdot 200 = 1\,000$ cm $= 10$ m y $3 \cdot 200 = 600$ cm $= 6$ m.

d. $10 \cdot 6 = 60$ m^2 (en el plano son 15 cm^2 y $15 \cdot 200^2 = 600\,000$ cm$^2 = 60$ m^2). Respuesta: la sala tiene 60 m^2.

Solución del ejercicio 7

a. $a = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$. Sumamos los cuadrados de los catetos y hacemos la

raíz cuadrada. Respuesta: la hipotenusa mide 10.

b. $c = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$. Para hallar un cateto restamos al cuadrado de la hipotenusa el cuadrado del cateto conocido. Respuesta: el otro cateto mide 12.

c. $a = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2} \approx 1{,}41$ (irracional). Es la diagonal de un cuadrado de lado 1. Respuesta: la hipotenusa mide $\sqrt{2} \approx 1{,}41$.

d. $7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625 = 25^2$: sí es rectángulo. Por el recíproco del teorema de Pitágoras, si el cuadrado del lado mayor es la suma de los cuadrados de los otros dos, el triángulo es rectángulo.

Solución del ejercicio 8

a. $d = \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = 15$ cm. La diagonal es la hipotenusa del triángulo formado por dos lados del rectángulo. Respuesta: 15 cm.

b. La altura divide la base en dos partes de 6 cm: $h = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8$ cm. En un triángulo isósceles la altura sobre el lado desigual lo divide en dos partes iguales.

c. $A = \dfrac{12 \cdot 8}{2} = 48$ cm^2. Área de un triángulo: base por altura entre dos. Respuesta: 48 cm^2.

d. $d = \sqrt{25 + 25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7{,}07$ cm. La diagonal de un cuadrado de lado l es siempre $l\sqrt{2}$.

Solución del ejercicio 9

a. $d = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Las diferencias son $4 - 1 = 3$ y $6 - 2 = 4$. Respuesta: $d = 5$.

b. $d = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$. Las diferencias son $3 - (-2) = 5$ y $13 - 1 = 12$. Respuesta: $d = 13$.

c. $d = \sqrt{25 + 25} = 5\sqrt{2} \approx 7{,}07$. Las dos diferencias valen 5. Respuesta: $d \approx 7{,}07$.

d. Las diferencias de coordenadas son los catetos de un triángulo rectángulo y la distancia es su hipotenusa.

Solución del ejercicio 10

a. La pared y el suelo forman el ángulo recto; la escalera es la hipotenusa (5 m).

b. $h = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$ m. Despejamos el cateto vertical restando cuadrados. Respuesta: llega a 4 m de altura.

c. Con el pie a 4 m: $h = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$ m. La escalera sigue midiendo 5 m, pero ahora el cateto horizontal mide 4 m.

d. Baja $4 - 3 = 1$ m. Respuesta: la parte alta de la escalera baja 1 m.

Solución del ejercicio 11

a. Los rayos del sol son paralelos, así que los dos triángulos tienen los mismos ángulos: son semejantes.
b. $\frac{2}{3} = \frac{h}{45}$, $h = \frac{2 \cdot 45}{3} = 30$ m. Multiplicamos en cruz y despejamos. Respuesta: la torre mide 30 m.
c. $k = \frac{45}{3} = 15$. Las medidas de la torre son 15 veces las del poste.
d. La torre mide 30 m: $\frac{30}{60} = \frac{2}{s}$, $s = 4$ m. Respuesta: el poste proyectaría una sombra de 4 m.

Solución del ejercicio 12

a. $d = \sqrt{64^2 + 48^2} = \sqrt{4\,096 + 2\,304} = \sqrt{6\,400} = 80$ cm. La diagonal es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son el ancho y el alto. Respuesta: 80 cm.
b. $\frac{80}{2{,}54} \approx 31{,}5$ pulgadas. Dividimos los centímetros entre 2,54. Respuesta: es una pantalla de unas 31,5 pulgadas.
c. $64 \cdot 48 = 3\,072$ cm^2. Multiplicamos el ancho por el alto. Respuesta: 3 072 cm^2.
d. $k = 2$, así que el área es $k^2 = 4$ veces mayor. Al duplicar la diagonal se duplican todas las longitudes ($k = 2$), y el área se multiplica por k^2. Respuesta: 4 veces mayor.

Solución del ejercicio 13

a. Los dos triángulos comparten el ángulo del árbol y tienen un lado paralelo.
b. $\frac{8}{12} = \frac{x}{30}$. Los lados correspondientes de los dos triángulos son proporcionales.
c. $x = \frac{8 \cdot 30}{12} = 20$ m. Respuesta: el río tiene 20 m de ancho.
d. Sin paralelismo, los triángulos no serían semejantes y la proporción daría un valor incorrecto.

Solución del ejercicio 14

a. $\sqrt{6^2 - 1{,}2^2} = \sqrt{34{,}56} \approx 5{,}88$ m. La rampa es la hipotenusa, la altura es un cateto y la distancia horizontal es el otro cateto, así que restamos cuadrados.
b. $\frac{1{,}2}{5{,}88} \approx 0{,}204 = 20{,}4\,\%$. Dividimos la altura entre la distancia horizontal y lo

expresamos en porcentaje.

c. No cumple: 20,4 % es mayor que 10 %. Respuesta: la rampa es demasiado empinada y no cumple la normativa.

d. Con el 8 %: horizontal $= \dfrac{1{,}2}{0{,}08} = 15$ m; la rampa mide $\sqrt{15^2 + 1{,}2^2} \approx 15{,}05$ m. Respuesta: la rampa debería medir unos 15,05 m.

Solución del ejercicio 15

a. $d = \sqrt{105^2 + 68^2} = \sqrt{15\,649} \approx 125{,}1$ m. La diagonal es la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos 105 m y 68 m. Respuesta: unos 125,1 m.

b. Por los lados: $105 + 68 = 173$ m. Ahorra $173 - 125{,}1 \approx 47{,}9$ m. Por los lados recorre el largo más el ancho. Respuesta: ahorra unos 47,9 m.

c. $\dfrac{125{,}1}{5} \approx 25$ s. Dividimos la distancia entre la velocidad. Respuesta: tarda unos 25 segundos.

d. $\dfrac{125{,}1}{173} \approx 0{,}72$, el 72 % aproximadamente. Dividimos la diagonal entre el recorrido por los lados. Respuesta: la diagonal es aproximadamente el 72 % de ese recorrido.

Solución del ejercicio 16

a. $4{,}2 \cdot 1\,500\,000 = 6\,300\,000$ cm $= 63$ km. Multiplicamos por la escala y pasamos de centímetros a kilómetros dividiendo entre 100 000. Respuesta: 63 km.

b. 300 km $= 30\,000\,000$ cm; $\dfrac{30\,000\,000}{1\,500\,000} = 20$ cm. Pasamos los kilómetros a centímetros y dividimos entre la escala. Respuesta: 20 cm.

c. 1 cm del mapa son 15 km, así que 1 cm^2 son $15^2 = 225$ km^2. Las áreas se multiplican por el cuadrado de la escala lineal.

d. $18 \cdot 225 = 4\,050$ km^2. Respuesta: la provincia tiene unos 4 050 km^2.

Solución del ejercicio 17

a. Los dos triángulos rectángulos tienen un ángulo igual (el de reflexión) y un ángulo recto, así que son semejantes.

b. $\dfrac{1{,}6}{2} = \dfrac{h}{10}$. Cada altura se divide entre la distancia de su pie al espejo.

c. $h = \dfrac{1{,}6 \cdot 10}{2} = 8$ m. Respuesta: el árbol mide 8 m.

d. $\dfrac{1{,}6}{x} = \dfrac{12}{10}$, $x = \dfrac{1{,}6 \cdot 10}{12} \approx 1{,}33$ m. Respuesta: debería colocarse a unos 1,33 m del espejo.

Solución del ejercicio 18

a. $\sqrt{4^2+3^2}=5$ m. La mitad del ancho de la casa (4 m) y la altura de la cumbrera (3 m) son los catetos. Respuesta: cada vertiente mide 5 m.
b. Una vertiente: $5\cdot 10=50$ m^2. Las dos: 100 m^2. Cada vertiente es un rectángulo de 5 m por los 10 m de largo de la casa. Respuesta: el tejado tiene 100 m^2.
c. $100\cdot 25=2\,500$ tejas. Multiplicamos los metros cuadrados por las tejas que se necesitan en cada uno. Respuesta: 2 500 tejas.
d. $\dfrac{8\cdot 3}{2}=12$ m^2. Es un triángulo isósceles de base 8 m y altura 3 m. Respuesta: el frontón tiene 12 m^2.

Solución del ejercicio 19

a. Catetos: 300 cm $=3$ m y 400 cm $=4$ m. Hipotenusa: $\sqrt{9+16}=5$ m. Con escala $1:100$, cada centímetro del plano es 1 m real.
b. $3+4+5=12$ m.
c. Plano: $\dfrac{3\cdot 4}{2}=6$ cm^2. Real: $\dfrac{3\cdot 4}{2}=6$ m^2 (porque $6\cdot 100^2=60\,000$ cm$^2=6$ m^2).
d. $6\cdot 6=36$ €. Respuesta: cubrir el jardín cuesta 36 €.

Solución del ejercicio 20

a. $m^2-n^2=5$, $2mn=12$ y $m^2+n^2=13$. Comprobación: $5^2+12^2=25+144=169=13^2$.
b. La altura divide la base en 3 cm y 3 cm: $h=\sqrt{36-9}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}\approx 5{,}20$ cm. Área $=\dfrac{6\cdot 3\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{3}\approx 15{,}59$ cm^2.
c. $k^2=\dfrac{18}{50}=\dfrac{9}{25}$, así que $k=\dfrac{3}{5}$. Las áreas están en razón k^2, así que hacemos la raíz cuadrada del cociente.
d. $9^2+12^2=81+144=225=15^2$: sí es rectángulo. Por el recíproco del teorema de Pitágoras, el triángulo es rectángulo; es la terna 3, 4, 5 multiplicada por 3.