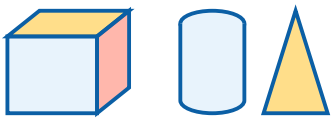
Apuntes - Geometría en el espacio

Curso: 3 Eso

En este tema aprenderás: cuerpos geométricos, unidades de medida, prismas, pirámides, cilindro, cono, esfera, desarrollos planos y secciones y cómo afrontar los problemas. Cada idea va en un cuadro de color, con ejemplos resueltos paso a paso.

Actividad de introducción: ¿cuánta agua cabe?

En un instituto de Tenerife se quiere llenar una piscina pequeña de 4 m de largo, 2 m de ancho y 1 m de profundidad. ¿Cuántos litros de agua hacen falta? Se calcula el volumen del prisma: $4 \cdot 2 \cdot 1 = 8$ m^3, que son 8 000 litros. Pero también hay que saber cuántos azulejos cubren las paredes, es decir, el área, y si en la piscina cabe un flotador esférico, es decir, comparar volúmenes. Los cuerpos geométricos aparecen en edificios, envases, depósitos, balones y juguetes. En este tema aprenderás a reconocer prismas, pirámides, cilindros, conos y esferas, a dibujar sus desarrollos planos y a calcular sus áreas y volúmenes con las fórmulas adecuadas y las unidades correctas.



Cuerpos geométricos

Propiedad

Los cuerpos geométricos son figuras de tres dimensiones. Se clasifican en **poliedros** (limitados por polígonos: prismas y pirámides) y **cuerpos redondos** (con superficies curvas: cilindro, cono y esfera). En todo poliedro convexo se cumple la **fórmula de Euler**: $C + V = A + 2$, donde C son las caras, V los vértices y A las aristas. Por ejemplo, el cubo tiene $6 + 8 = 12 + 2$. Los cinco poliedros regulares son el tetraedro, el cubo, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro.

Unidades de medida

Propiedad

El **área** se mide en unidades cuadradas (cm^2, m^2) y el **volumen** en unidades cúbicas (cm^3, m^3). Equivalencias útiles: $1\ \text{m}^3 = 1\,000\ \text{dm}^3$; $1\ \text{dm}^3 = 1\,000\ \text{cm}^3$; $1\ \text{dm}^3 = 1$ litro; $1\ \text{cm}^3 = 1$ mililitro. Así, 2,5 m^3 son 2 500 dm^3 o 2 500 litros, y 3 500 cm^3 son 3,5 litros.

Prismas

Propiedad: prismas

Un prisma tiene dos bases paralelas e iguales y caras laterales que son rectángulos (si es recto). Con P_b el perímetro de la base, A_b su área y h la altura:

- Área lateral: $A_L = P_b \cdot h$.
- Área total: $A_T = A_L + 2A_b$.
- Volumen: $V = A_b \cdot h$.

Regla

Para un ortoedro de aristas a, b, c: $A_T = 2(ab + ac + bc)$ y $V = abc$. Para un cubo de arista a: $A_T = 6a^2$ y $V = a^3$. Con $a = 5$: $A_T = 150$ y $V = 125$.

Pirámides

Propiedad: pirámides

Una pirámide tiene una base poligonal y caras laterales triangulares que se juntan en el vértice. Si es regular, la **apotema** ap es la altura de cada cara lateral:

- $A_L = \frac{P_b \cdot ap}{2}$.
- $A_T = A_L + A_b$.
- $V = \frac{A_b \cdot h}{3}$.

Regla

La altura de la pirámide, la apotema de la base y la apotema lateral forman un triángulo rectángulo, lo que permite usar Pitágoras. Pirámide cuadrada de base 6 y altura 4: apotema lateral $= \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$; $A_L = \frac{24 \cdot 5}{2} = 60$; $A_T = 60 + 36 = 96$; $V = \frac{36 \cdot 4}{3} = 48$.

Cilindro

Observación

Con radio r y altura h: $A_L = 2\pi rh$, $A_T = 2\pi r(r + h)$ y $V = \pi r^2 h$. El desarrollo del cilindro es un rectángulo de base $2\pi r$ y altura h más dos círculos.

Cono

Observación

Con radio r, altura h y generatriz $g = \sqrt{r^2 + h^2}$: $A_L = \pi r g$, $A_T = \pi r(r + g)$ y $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$. Cono de $r = 3$, $h = 4$: $g = 5$, $A_L = 15\pi \approx 47{,}12$, $A_T = 24\pi \approx 75{,}40$, $V = 12\pi \approx 37{,}70$.

Esfera

Con radio r: $A = 4\pi r^2$ y $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Esfera de $r = 6$: $A = 144\pi \approx 452{,}39$ y $V = 288\pi \approx 904{,}78$.

Cómo se hace: calcular el área y el volumen de un cuerpo

1. Identifica el cuerpo y dibuja un esquema con sus medidas.
2. Si falta algún dato (apotema, generatriz), calcúlalo con el teorema de Pitágoras.
3. Escribe la fórmula del área o del volumen y sustituye.
4. Pasa todas las medidas a la misma unidad y da el resultado en cm^2, m^2, cm^3 o m^3.

Definición: poliedro regular

Un **poliedro regular** tiene todas sus caras iguales y regulares, y en cada vértice se juntan el mismo número de caras. Solo existen cinco: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 1

Una piscina de 10 m por 5 m y 2 m de profundidad tiene $V = 100\ \text{m}^3 = 100\,000$ litros.

Llenada hasta 1,5 m contiene 75 000 litros.

Ejemplo 2

Un depósito cilíndrico de radio 0,5 m y altura 2 m tiene $V = \pi \cdot 0{,}25 \cdot 2 \approx 1{,}57\ \text{m}^3$, es decir, unos 1 571 litros.

Ejemplo 3

¿Qué radio tiene una esfera de volumen 36π? $\frac{4}{3}\pi r^3 = 36\pi \Rightarrow r^3 = 27 \Rightarrow r = 3$.

Desarrollos planos y secciones

Definición: desarrollo plano

El **desarrollo plano** de un cuerpo es la figura que se obtiene al abrirlo y extenderlo sobre un plano. El de un cubo está formado por seis cuadrados, el de un prisma por dos bases y varios rectángulos, el de un cilindro por un rectángulo y dos círculos, y el de un cono por un sector circular y un círculo. Calcular el área total es sumar las áreas de todas las piezas del desarrollo, lo que ayuda a no olvidar ninguna cara. Una **sección** es la figura que resulta al cortar el cuerpo con un plano: un corte horizontal de un cilindro es un círculo, y un corte horizontal de una pirámide cuadrada es un cuadrado más pequeño. Imaginar secciones ayuda a visualizar los cuerpos y a entender por qué las alturas y las apotemas forman triángulos rectángulos.

Cómo afrontar los problemas

Observación

Identifica el cuerpo y qué te piden (área o volumen) y dibuja un esquema con los datos. Si te falta una longitud, como la apotema de una pirámide o la generatriz de un cono, búscala con el teorema de Pitágoras. Decide si debes dar el resultado exacto con π o aproximado con dos decimales, y expresa siempre las unidades. Para problemas de capacidad, convierte los volúmenes a litros. Si un cuerpo se ve afectado por una razón de semejanza k, las áreas cambian por k^2 y los volúmenes por k^3.

- Olvidar dividir entre 3 en el volumen de pirámides y conos.
- Confundir la altura con la apotema o la generatriz.
- Usar el diámetro como radio.
- Mezclar unidades (cm con m) o expresar volúmenes en unidades cuadradas.
- Calcular el área total sin sumar las bases (o sumarlas de más en un recipiente sin tapa).

Secciones y cuerpos compuestos

Método: calcular áreas y volúmenes de un cuerpo compuesto

1. Descompón el cuerpo en cuerpos simples (cilindro, semiesfera, prisma…).
2. Calcula el volumen de cada parte y suma los volúmenes.
3. Para el área, suma solo las superficies exteriores: no cuentes las caras que se pegan entre sí.
4. Comprueba las unidades y convierte a litros si el problema habla de capacidad.

Ejemplo 4

Una casa tiene un prisma de 8 m por 6 m por 3 m rematado por un tejado en forma de prisma triangular de 8 m de largo, 6 m de base y 2 m de altura del triángulo. Calcula el volumen total.

Prisma inferior: $8 \cdot 6 \cdot 3 = 144$ m^3. Tejado: área del triángulo $\dfrac{6 \cdot 2}{2} = 6$ m^2 por 8 m de largo $= 48$ m^3. Total: $144 + 48 = 192$ m^3.

Cómo cambian las medidas al cambiar la escala

Propiedad: razón de semejanza en el espacio

Si un cuerpo se amplía con razón k, las longitudes se multiplican por k, las áreas por k^2 y los volúmenes por k^3. Por eso un modelo a escala $1:10$ tiene $\dfrac{1}{100}$ del área y $\dfrac{1}{1\,000}$ del volumen del original. Esta idea explica, por ejemplo, por qué una botella el doble de alta (y semejante) contiene ocho veces más líquido.

Ejemplo 5

Una caja de 20 cm de arista se sustituye por otra de 40 cm. Compara áreas y volúmenes.

Razón $k = 2$. Área: $6 \cdot 40^2 = 9\,600$ cm^2 frente a $2\,400$ cm^2: cuatro veces mayor. Volumen: $64\,000$ cm^3 frente a $8\,000$ cm^3: ocho veces mayor.

- Confundir la altura de la pirámide con la apotema de una cara lateral.
- Olvidar el factor $\dfrac{1}{3}$ en el volumen de pirámides y conos.
- Dar un volumen en cm^2 o un área en cm^3.
- Usar el diámetro en lugar del radio en las fórmulas del cilindro, el cono y la esfera.

¿Sabías que?

Arquímedes, matemático griego del siglo III antes de Cristo, descubrió que el volumen de una esfera es dos tercios del volumen del cilindro que la rodea. Estaba tan orgulloso de ese resultado que pidió que lo grabaran en su tumba. Hoy esas fórmulas permiten calcular desde la capacidad de una lata hasta el tamaño de los planetas.

Unidades y cuerpos en la vida real

Ejemplo 6

Un acuario tiene forma de ortoedro de 60 cm de largo, 30 cm de ancho y 40 cm de alto. ¿Cuántos litros de agua caben si se llena hasta 5 cm del borde?

La altura del agua no es la del acuario, sino $40 - 5 = 35$ cm. El volumen de agua es el de un ortoedro de 60 cm por 30 cm por 35 cm: $60 \cdot 30 \cdot 35 = 63\,000$ cm^3. Como un litro equivale a 1 000 cm^3, dividimos entre mil y obtenemos 63 litros. Es importante leer bien qué parte del cuerpo se llena y trabajar siempre con las mismas unidades antes de multiplicar.

¡Atención!

Las unidades de área y de volumen no se convierten igual que las de longitud. Como 1 m = 10 dm, resulta que 1 m^2 = 100 dm^2 y 1 m^3 = 1 000 dm^3. Antes de aplicar una fórmula, pasa todas las medidas a la misma unidad de longitud. Y no confundas la altura de una pirámide o de un cono con la apotema o la generatriz: se relacionan con el teorema de Pitágoras.

El consejo de Otto

Un cono ocupa exactamente la tercera parte del cilindro de igual base y altura, y una pirámide la tercera parte del prisma correspondiente. Si tu resultado no cumple esa relación, revisa el cálculo.