Soluciones - Geometría en el espacio

Curso: 3 Eso

Solución del ejercicio 1

a. Cubo: 6 caras, 8 vértices y 12 aristas.
b. Prisma triangular: 5 caras (2 triángulos y 3 rectángulos), 6 vértices y 9 aristas.
c. Pirámide cuadrangular: 5 caras (1 cuadrado y 4 triángulos), 5 vértices y 8 aristas.
d. Cubo: $6 + 8 = 14 = 12 + 2$. Prisma: $5 + 6 = 11 = 9 + 2$. Pirámide: $5 + 5 = 10 = 8 + 2$. Se cumple siempre. Respuesta: los tres poliedros cumplen la fórmula de Euler.

Solución del ejercicio 2

a. $2{,}5 \cdot 1\,000 = 2\,500$ L. Como cada metro cúbico equivale a 1 000 litros, multiplicamos por mil. Respuesta: 2,5 m^3 son 2 500 litros.
b. $\dfrac{3\,500}{1\,000} = 3{,}5$ L. Un litro son 1 000 cm^3, así que dividimos entre mil. Respuesta: 3 500 cm^3 son 3,5 litros.
c. $0{,}75 \cdot 1\,000 = 750$ cm^3. Ahora pasamos de una unidad mayor a una menor, así que multiplicamos por mil. Respuesta: 0,75 litros son 750 cm^3.
d. $40^3 = 64\,000$ $cm^3 = 64$ L. Calculamos el volumen del cubo elevando la arista al cubo y convertimos los cm^3 en litros dividiendo entre mil. Respuesta: caben 64 litros.

Solución del ejercicio 3

a. $V = 8 \cdot 5 \cdot 4 = 160$ cm^3. El volumen de un ortoedro es el producto de sus tres dimensiones. Respuesta: la caja tiene 160 cm^3.
b. $A = 2(8 \cdot 5 + 8 \cdot 4 + 5 \cdot 4) = 2(40 + 32 + 20) = 184$ cm^2. Un ortoedro tiene tres parejas de caras iguales; sumamos el área de una cara de cada pareja y multiplicamos por 2. Respuesta: 184 cm^2.
c. $D = \sqrt{64 + 25 + 16} = \sqrt{105} \approx 10{,}25$ cm. Sustituimos las tres dimensiones en la fórmula de la diagonal del ortoedro. Respuesta: la diagonal mide unos 10,25 cm.
d. $\dfrac{40}{8} \cdot \dfrac{40}{5} \cdot \dfrac{40}{4} = 5 \cdot 8 \cdot 10 = 400$ cajas. Dividimos cada arista del cubo entre la dimensión de la caja en esa dirección; los cocientes son exactos, así que no queda hueco. Respuesta: caben 400 cajas.

Solución del ejercicio 4

a. $\sqrt{9+16} = 5$ cm. Aplicamos el teorema de Pitágoras porque la base es un triángulo rectángulo.
b. $V = \frac{3 \cdot 4}{2} \cdot 10 = 60$ cm^3. El volumen de un prisma es el área de la base, $\frac{3 \cdot 4}{2} = 6$ cm^2, por la altura del prisma.
c. $A_L = (3+4+5) \cdot 10 = 120$ cm^2 (perímetro de la base por la altura). Las tres caras laterales son rectángulos de altura 10 cm.
d. $A_T = 120 + 2 \cdot 6 = 132$ cm^2 (las dos bases suman 12 cm^2). Respuesta: el área total del prisma es 132 cm^2.

Solución del ejercicio 5

a. La apotema es la hipotenusa de un triángulo de catetos 4 y 3 (mitad del lado): $a = \sqrt{4^2+3^2} = 5$ cm. La altura, la mitad del lado de la base y la apotema forman un triángulo rectángulo.
b. $V = \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 4 = 48$ cm^3. El volumen de una pirámide es un tercio del área de la base por la altura.
c. $A_L = 4 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} = 60$ cm^2. Hay cuatro caras triangulares de base 6 cm y altura 5 cm.
d. $A_T = 60 + 36 = 96$ cm^2. Sumamos el área lateral y el área del cuadrado de la base, $6^2 = 36$ cm^2.

Solución del ejercicio 6

a. $V = \pi \cdot 3^2 \cdot 10 = 90\pi \approx 282{,}74$ cm^3. Sustituimos $r = 3$ y $h = 10$ en la fórmula. Respuesta: el volumen es $90\pi \approx 282{,}74$ cm^3.
b. $A_L = 2\pi \cdot 3 \cdot 10 = 60\pi \approx 188{,}50$ cm^2. El área lateral es un rectángulo cuya base es la longitud de la circunferencia, $2\pi r$, y cuya altura es h.
c. $A_T = 2\pi \cdot 3(3+10) = 78\pi \approx 245{,}04$ cm^2. Al área lateral le sumamos las dos bases circulares, $2\pi r^2 = 18\pi$: $60\pi + 18\pi = 78\pi$ cm^2.
d. $282{,}74$ cm$^3 \approx 0{,}28$ L. Dividimos los cm^3 entre 1 000 para pasar a litros. Respuesta: caben unos 0,28 litros.

Solución del ejercicio 7

a. $g = \sqrt{3^2+4^2} = 5$ cm. El radio, la altura y la generatriz forman un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es la generatriz. Respuesta: $g = 5$ cm.

b. $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 9 \cdot 4 = 12\pi \approx 37{,}70$ cm^3. El volumen de un cono es la tercera parte del de un cilindro con la misma base y la misma altura. Respuesta: $12\pi \approx 37{,}70$ cm^3.
c. $A_L = \pi \cdot 3 \cdot 5 = 15\pi \approx 47{,}12$ cm^2. Usamos la generatriz, no la altura, en la fórmula del área lateral. Respuesta: $15\pi \approx 47{,}12$ cm^2.
d. $A_T = 15\pi + \pi \cdot 3^2 = 24\pi \approx 75{,}40$ cm^2. Al área lateral le sumamos el círculo de la base, $\pi r^2 = 9\pi$. Respuesta: el área total es $24\pi \approx 75{,}40$ cm^2.

Solución del ejercicio 8

a. $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 216 = 288\pi \approx 904{,}78$ cm^3. Primero calculamos $6^3 = 216$ y después multiplicamos por $\frac{4}{3}\pi$. Respuesta: unos 904,78 cm^3.
b. $A = 4\pi \cdot 36 = 144\pi \approx 452{,}39$ cm^2. Calculamos $6^2 = 36$ y multiplicamos por 4π. Respuesta: unos 452,39 cm^2.
c. $\frac{4}{3}r^3 = 36$, $r^3 = 27$, $r = 3$ cm. Igualamos la fórmula del volumen a 36π, simplificamos π y despejamos r^3. La raíz cúbica de 27 es 3.
d. $\left(\frac{6}{3}\right)^3 = 8$ veces (el volumen se multiplica por k^3). Las dos esferas son semejantes con razón $k = 2$, así que la grande tiene 8 veces el volumen de la pequeña.

Solución del ejercicio 9

a. Largo $= 2\pi \cdot 2 = 4\pi \approx 12{,}57$ cm y ancho $= 5$ cm. Al desenrollar la superficie lateral, la circunferencia de la base se convierte en el lado largo del rectángulo.
b. $4\pi \cdot 5 = 20\pi \approx 62{,}83$ cm^2. El área del rectángulo es la base por la altura y coincide con el área lateral del cilindro.
c. $2 \cdot \pi \cdot 2^2 = 8\pi \approx 25{,}13$ cm^2. Cada base es un círculo de radio 2 cm, con área 4π cm^2.
d. Un cuadrado (base) y cuatro triángulos isósceles (caras laterales) unidos a sus lados. Respuesta: el desarrollo de la pirámide tiene un cuadrado y cuatro triángulos iguales.

Solución del ejercicio 10

a. $V = 10 \cdot 5 \cdot 1{,}8 = 90$ m$^3 = 90\,000$ L. Multiplicamos las tres dimensiones y pasamos a litros sabiendo que 1 m^3 son 1 000 litros. Respuesta: 90 m^3, es decir, 90 000 litros.

b. $\frac{90\,000}{1\,500} = 60$ horas. Dividimos el volumen total entre los litros que echa el grifo cada hora. Respuesta: tarda 60 horas, dos días y medio.
c. Fondo: $10 \cdot 5 = 50$ m^2. Paredes: $2(10+5) \cdot 1{,}8 = 54$ m^2. Total: 104 m^2. No se azuleja la parte de arriba porque está abierta; las paredes son dos rectángulos de $10 \times 1{,}8$ y dos de $5 \times 1{,}8$.
d. $104 \cdot 28 = 2\,912$ €. Multiplicamos los metros cuadrados por el precio de cada uno. Respuesta: el azulejo cuesta 2 912 €.

Solución del ejercicio 11

a. $V = \pi \cdot 9 \cdot 12 = 108\pi \approx 339{,}29$ cm$^3 \approx 0{,}34$ L. Es un cilindro: área de la base, 9π, por la altura. Respuesta: la lata tiene unos 339 cm^3, es decir, 0,34 litros.
b. $A_L = 2\pi \cdot 3 \cdot 12 = 72\pi \approx 226{,}19$ cm^2. La etiqueta es un rectángulo de largo $2\pi \cdot 3$ y alto 12 cm. Respuesta: unos 226 cm^2.
c. $A_T = 72\pi + 2\pi \cdot 9 = 90\pi \approx 282{,}74$ cm^2. Al área lateral le sumamos la tapa y el fondo, dos círculos de 9π cm^2. Respuesta: unos 283 cm^2.
d. $\frac{2\,000}{339{,}29} \approx 5{,}9$: casi 6 latas. Dividimos 2 000 cm^3 entre la capacidad de una lata. Respuesta: se llenan 5 latas completas y casi una sexta.

Solución del ejercicio 12

a. $V = \frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot 2 = 6$ m^3. Es una pirámide: un tercio del área de la base, $3^2 = 9$ m^2, por la altura. Respuesta: 6 m^3.
b. $a = \sqrt{1{,}5^2 + 2^2} = \sqrt{6{,}25} = 2{,}5$ m. Formamos un triángulo rectángulo con la altura (2 m) y la mitad del lado de la base (1,5 m); la apotema es la hipotenusa.
c. $A_L = 4 \cdot \frac{3 \cdot 2{,}5}{2} = 15$ m^2. Las cuatro caras son triángulos de base 3 m y altura 2,5 m. Respuesta: hacen falta 15 m^2 de tela.
d. $15 \cdot 1{,}10 = 16{,}5$ m^2. Aumentar un 10 % equivale a multiplicar por 1,10. Respuesta: se compran 16,5 m^2 de tela.

Solución del ejercicio 13

a. $V = \pi \cdot 2^2 \cdot 6 = 24\pi \approx 75{,}40$ m^3. Usamos la fórmula del cilindro con $r = 2$ m y $h = 6$ m. Respuesta: unos 75,40 m^3.
b. $75{,}40 \cdot 1\,000 \approx 75\,400$ L. Cada metro cúbico son 1 000 litros. Respuesta: unos 75 400 litros.
c. $75\,400 \cdot 0{,}6 \approx 45\,239$ L. El 60 % se calcula multiplicando por 0,6. Respuesta: contiene unos 45 239 litros.

d. $A_L = 2\pi \cdot 2 \cdot 6 = 24\pi \approx 75{,}40$ m^2. La superficie lateral es un rectángulo de base $2\pi \cdot 2$ y altura 6 m. Respuesta: hay que pintar unos 75,40 m^2.

Solución del ejercicio 14

a. $V_{cono} = \frac{1}{3}\pi \cdot 9 \cdot 10 = 30\pi \approx 94{,}25$ cm^3. Aplicamos $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ con $r = 3$ cm y $h = 10$ cm.

b. $V_{bola} = \frac{4}{3}\pi \cdot 27 = 36\pi \approx 113{,}10$ cm^3. Aplicamos $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ con $r = 3$ cm, así que $r^3 = 27$.

c. Sí se desborda, porque la bola (36π) tiene más volumen que el cono (30π). Comparamos los dos volúmenes: $36\pi > 30\pi$.

d. Sobran $6\pi \approx 18{,}85$ cm^3. Restamos los dos volúmenes: $36\pi - 30\pi = 6\pi$. Respuesta: se desbordan unos 18,85 cm^3 de helado.

Solución del ejercicio 15

a. $\frac{60}{10} \cdot \frac{40}{10} \cdot \frac{30}{10} = 6 \cdot 4 \cdot 3 = 72$ latas. Cada lata ocupa un cuadrado de 10 cm por 10 cm y 10 cm de alto, así que dividimos cada dimensión de la caja entre 10. Respuesta: caben 72 latas.

b. $V = \pi \cdot 25 \cdot 10 = 250\pi \approx 785{,}4$ cm^3. El radio es la mitad del diámetro, 5 cm. Respuesta: cada lata tiene unos 785,4 cm^3.

c. Caja: $60 \cdot 40 \cdot 30 = 72\,000$ cm^3. Latas: $72 \cdot 250\pi = 18\,000\pi \approx 56\,549$ cm^3. Multiplicamos las tres dimensiones de la caja y el volumen de una lata por 72.

d. $\frac{56\,549}{72\,000} \approx 0{,}785 = 78{,}5\ \%$ (es $\frac{\pi}{4}$). Dividimos el volumen ocupado entre el de la caja. Respuesta: las latas ocupan un 78,5 % de la caja; el resto son huecos entre los cilindros.

Solución del ejercicio 16

a. $V = \frac{1}{3} \cdot 230^2 \cdot 146 \approx 2\,574\,467$ m^3. Calculamos un tercio del área de la base, $230^2 = 52\,900$ m^2, por la altura. Respuesta: unos 2,57 millones de m^3.

b. $a = \sqrt{115^2 + 146^2} = \sqrt{34\,541} \approx 185{,}8$ m. La apotema es la hipotenusa del triángulo rectángulo de catetos 146 m (altura) y 115 m (mitad del lado).

c. $A_L = 4 \cdot \frac{230 \cdot 185{,}8}{2} \approx 85\,468$ m^2. Hay cuatro caras triangulares de base 230 m y altura igual a la apotema. Respuesta: unos 85 468 m^2.

d. Altura: $\frac{146}{500} = 0{,}292$ m $= 29{,}2$ cm. Volumen: $\frac{2\,574\,467}{500^3} \approx 0{,}0206$ m$^3 \approx 20\,600$ cm^3. Las longitudes se dividen entre 500 y los volúmenes entre $500^3 = 125\,000\,000$. Respuesta: la maqueta mide 29,2 cm de alto y tiene unos 20 600 cm^3.

Solución del ejercicio 17

a. $V_{cil} = \pi \cdot 4 \cdot 5 = 20\pi \approx 62{,}83$ m^3. Volumen del cilindro con $r = 2$ m y $h = 5$ m.

b. $V_{semi} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 8 = \frac{16\pi}{3} \approx 16{,}76$ m^3. Es la mitad del volumen de una esfera de radio 2 m, con $r^3 = 8$.

c. $V = 20\pi + \frac{16\pi}{3} = \frac{76\pi}{3} \approx 79{,}58$ m$^3 \approx 79\,580$ L. Sumamos los dos volúmenes y multiplicamos por 1 000 para pasar a litros. Respuesta: unos 79 580 litros.

d. Lateral: $2\pi \cdot 2 \cdot 5 = 20\pi$. Semiesfera: $\frac{1}{2} \cdot 4\pi \cdot 4 = 8\pi$. Total: $28\pi \approx 87{,}96$ m^2. La semiesfera tiene la mitad de la superficie de la esfera, $4\pi r^2$. Respuesta: hay que pintar unos 87,96 m^2.

Solución del ejercicio 18

a. $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 216 = 288\pi \approx 904{,}78$ cm^3. Elevamos el radio al cubo, $6^3 = 216$, y multiplicamos por $\frac{4}{3}\pi$.

b. $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 27 = 36\pi \approx 113{,}10$ cm^3. Con $r = 3$ cm, $r^3 = 27$.

c. $\frac{288\pi}{36\pi} = 8$ bolas. Dividimos el volumen grande entre el pequeño; el metal no se pierde al fundir. Respuesta: salen 8 bolas.

d. Grande: $4\pi \cdot 36 = 144\pi$. Pequeñas: $8 \cdot 4\pi \cdot 9 = 288\pi$. La superficie total de las pequeñas es el doble. Respuesta: aunque el volumen total es el mismo, las 8 bolas tienen el doble de superficie que la esfera grande.

Solución del ejercicio 19

a. $A = 4\pi \cdot 6\,371^2 \approx 5{,}10 \cdot 10^8$ km^2. Sustituimos el radio en $A = 4\pi r^2$ y redondeamos a notación científica. Respuesta: unos $5{,}10 \cdot 10^8$ km^2.

b. $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 6\,371^3 \approx 1{,}08 \cdot 10^{12}$ km^3. Sustituimos el radio en $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Respuesta: unos $1{,}08 \cdot 10^{12}$ km^3.

c. $\frac{1\,737}{6\,371} \approx 0{,}273$. Dividimos el radio de la Luna entre el de la Tierra; es la razón de

semejanza k.

d. $k^3 \approx 0{,}273^3 \approx 0{,}0203$, es decir, unos $\frac{1}{49}$ del volumen de la Tierra. En cuerpos semejantes los volúmenes están en razón k^3. Respuesta: la Luna tiene aproximadamente la cuadragésima novena parte del volumen de la Tierra.

Solución del ejercicio 20

a. Arista $= \sqrt[3]{125} = 5$ cm. Diagonal $= 5\sqrt{3} \approx 8{,}66$ cm. La arista es la raíz cúbica del volumen, y la diagonal de un cubo de arista a es $a\sqrt{3}$.

b. $V = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3 = 16\pi$, $r^3 = 8$, $r = 2$ cm y $h = 4$ cm. Comprobación: $\pi \cdot 4 \cdot 4 = 16\pi$.

c. $\frac{1}{3}\pi \cdot 9 \cdot h = 12\pi$, $3h = 12$, $h = 4$ cm. Comprobación: $\frac{1}{3}\pi \cdot 9 \cdot 4 = 12\pi$.

d. El volumen se multiplica por $2^3 = 8$ y la superficie por $2^2 = 4$. Porque el volumen depende de r^3 y la superficie de r^2.