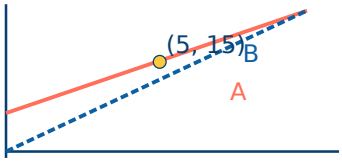
Apuntes - Funciones lineales y cuadráticas

Curso: 3 Eso

En este tema aprenderás: qué es una función, función lineal y función afín, función cuadrática, para dibujar una parábola, interpretación de gráficas y modelizar situaciones con funciones. Cada idea va en un cuadro de color, con ejemplos resueltos paso a paso.

Actividad de introducción: dos tarifas para patinar

En una pista de patinaje de Salamanca hay dos formas de pagar. Con el bono A pagas 5 € y después 2 € por hora. Con el bono B no hay cuota, pero cada hora cuesta 3 €. Si patinas 1 hora, B es más barato; si patinas 8 horas, A gana con claridad. Para decidir con rigor se escribe cada tarifa como una función, $A(x) = 5 + 2x$ y $B(x) = 3x$, y se dibuja su gráfica: dos rectas que se cortan justo en $x = 5$ horas. Las funciones son la herramienta con la que las matemáticas describen cómo una cantidad depende de otra, ya sea el precio según el tiempo, la altura de un balón según la distancia o la temperatura según la altitud. En este tema trabajarás con funciones lineales, afines y cuadráticas.



Qué es una función

Definición: función

Una **función** es una relación entre dos variables en la que a cada valor de la variable independiente x le corresponde, como máximo, un único valor de la variable dependiente y. Se escribe $y = f(x)$. Se puede dar mediante una **tabla de valores**, una **gráfica** o una **expresión algebraica** (fórmula). Para representarla se calculan pares (x, y), se sitúan como puntos en unos ejes de coordenadas y se unen. El conjunto de valores de x para los que existe la función es el **dominio**.

Función lineal y función afín

Propiedad

Una función de la forma $y = mx + n$ tiene como gráfica una **recta**.

Propiedad: función lineal y función afín

- m es la **pendiente**: indica cuánto aumenta y cuando x aumenta una unidad. Si $m > 0$ la recta sube, si m baja y si $m = 0$ es horizontal.
- n es la **ordenada en el origen**: es el valor de y cuando $x = 0$; la recta corta al eje Y en $(0, n)$.
- Si $n = 0$, $y = mx$ es una función de proporcionalidad directa y la recta pasa por el origen.

Regla

Para representar una recta bastan dos puntos. Por ejemplo, $y = 2x - 6$: si $x = 0$, $y = -6$; si $y = 0$, $x = 3$. Los puntos de corte con los ejes son $(0, -6)$ y $(3, 0)$.

Propiedad

Si se conocen dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), la pendiente es $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. La recta que pasa por $(1, 3)$ y $(3, 7)$ tiene $m = \frac{4}{2} = 2$ y, como $3 = 2 \cdot 1 + n$, $n = 1$: $y = 2x + 1$. Dos rectas son **paralelas** si tienen la misma pendiente. Para hallar el punto donde se cortan dos rectas se igualan sus ecuaciones.

Función cuadrática

Propiedad

Una función de la forma $y = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$ tiene como gráfica una **parábola**.

Propiedad: función cuadrática

- Si $a > 0$, la parábola se abre hacia arriba y el vértice es un mínimo. Si a, se abre hacia abajo y el vértice es un máximo.
- El **vértice** tiene abscisa $x_v = -\frac{b}{2a}$ y ordenada $y_v = f(x_v)$.
- El **eje de simetría** es la recta vertical $x = x_v$.
- Corte con el eje Y: $(0, c)$.
- Cortes con el eje X: se resuelve $ax^2 + bx + c = 0$; pueden ser dos, uno o ninguno según el discriminante.

Ejemplo 1

$y = x^2 - 6x + 5$.

$x_v = \frac{6}{2} = 3$, $y_v = 9 - 18 + 5 = -4$: vértice $(3, -4)$. Cortes con el eje X: $x^2 - 6x + 5 = 0$ da $x = 1$ y $x = 5$. Corte con el eje Y: $(0, 5)$. Con estos puntos y los simétricos ya se dibuja la parábola.

Para dibujar una parábola

Cómo se hace: dibujar una parábola

1. Calcula el vértice.
2. Calcula los cortes con los ejes.
3. Haz una tabla con valores de x a ambos lados del vértice (por simetría, los valores de y se repiten).
4. Une los puntos con una curva suave.

Interpretación de gráficas

Definición: creciente

Una función es **creciente** en un intervalo si al aumentar x aumenta y, y **decreciente** si disminuye. Un **máximo** es el punto más alto y un **mínimo** el más bajo. En la parábola $y = x^2 - 6x + 5$, la función decrece hasta $x = 3$ y crece después. Interpretar bien una gráfica, con sus unidades, permite responder preguntas del contexto: cuándo se alcanza la altura máxima, a partir de qué cantidad un negocio es rentable, etc.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 2

Un taxi cobra 2,50 € de bajada de bandera y 1,20 € por kilómetro: $y = 1{,}2x + 2{,}5$.

Para 15 km: $y = 18 + 2{,}5 = 20{,}5$ €. Con 14,50 €: $1{,}2x = 12 \Rightarrow x = 10$ km.

Ejemplo 3

Una pelota sigue $h = -5t^2 + 20t$.

El vértice está en $t = 2$ s con $h = 20$ m (altura máxima). Vuelve al suelo cuando $h = 0$: $-5t(t - 4) = 0$, a los 4 s.

Ejemplo 4

$y = x^2 + 2x + 5$

$\Delta = 4 - 20$, no corta al eje X. El vértice es $(-1, 4)$.

Modelizar situaciones con funciones

Observación

Las funciones sirven para describir situaciones reales. Cuando una magnitud cambia a ritmo constante, como el precio de un taxi según los kilómetros o la distancia que recorre un tren, el modelo es una función lineal: el ritmo de cambio es la pendiente y el valor inicial es la ordenada en el origen. Cuando hay un máximo o un mínimo, como la altura de una pelota lanzada al aire, el área máxima de un corral o el beneficio de una empresa, el modelo es una función cuadrática y el vértice responde a la pregunta «¿cuándo se alcanza el máximo?».

Observación

Para resolver un problema con funciones: identifica la variable independiente y la dependiente, escribe la fórmula, calcula los valores que pide el enunciado sustituyendo o resolviendo una ecuación, y comprueba que el resultado tiene sentido (por ejemplo, un tiempo no puede ser negativo). Para comparar dos opciones, como dos tarifas, se igualan las dos funciones y se resuelve la ecuación: la solución indica el punto a partir del cual una opción es mejor que la otra. Representa siempre la gráfica con sus ejes rotulados y sus unidades.

- Confundir la pendiente m con la ordenada en el origen n.
- Calcular mal el vértice: la fórmula lleva un signo menos, $x_v = -\frac{b}{2a}$.
- Unir los puntos de una parábola con segmentos rectos en lugar de una curva.
- Olvidar que una función de dos puntos de corte tiene un eje de simetría entre ellos.
- Dar el vértice como solución de la ecuación $f(x) = 0$.

Estudiar una parábola paso a paso

Método: representar $y = ax^2 + bx + c$

1. Calcula el vértice: $x_v = -\dfrac{b}{2a}$ y después y_v sustituyendo.
2. Calcula los cortes con el eje X resolviendo $ax^2 + bx + c = 0$ (si existen) y con el eje Y haciendo $x = 0$.
3. Haz una tabla con valores a ambos lados del vértice; la parábola es simétrica respecto de la recta $x = x_v$.
4. Dibuja la curva uniendo los puntos con trazo suave. Si $a > 0$ abre hacia arriba y si a, hacia abajo.

Ejemplo 5

Estudia $y = -x^2 + 2x + 3$.

Vértice: $x_v = -\dfrac{2}{-2} = 1$ e $y_v = -1 + 2 + 3 = 4$, luego $V(1, 4)$, un máximo porque $a = -1$. Cortes con X: $x^2 - 2x - 3 = 0$, $x = \dfrac{2 \pm 4}{2}$, así que $x = 3$ y $x = -1$. Corte con Y: $(0, 3)$. Punto simétrico de $(0, 3)$ respecto de $x = 1$: $(2, 3)$.

Modelos lineales y cuadráticos

Propiedad: cuándo usar cada modelo

Si una magnitud cambia siempre la misma cantidad por cada unidad de la otra (un precio por kilómetro, una pérdida de litros por minuto), el modelo es lineal o afín. Si primero crece y después decrece, o al revés, y la gráfica es una curva simétrica, el modelo es cuadrático: áreas que dependen de un lado, trayectorias de balones, ingresos según el precio.

Ejemplo 6

Una tarifa cobra 3 € más 0,50 € por kilo. Escribe la función y calcula el coste de 9 kg.

$C(x) = 3 + 0{,}5x$ y $C(9) = 3 + 4{,}5 = 7{,}50$ €. La pendiente 0,5 son los euros por kilo y la ordenada 3 es la cuota fija.

- Calcular la pendiente como $\dfrac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$: se divide la variación de y entre la de x.
- Olvidar el signo de b al calcular $x_v = -\dfrac{b}{2a}$.
- Unir los puntos de una parábola con segmentos rectos: la curva debe ser suave.
- Igualar $y = 0$ para el corte con el eje Y: el corte con el eje Y se calcula con $x = 0$.

¿Sabías que?

Galileo Galilei estudió en el siglo XVII la caída de los cuerpos y descubrió que las trayectorias de los proyectiles son parábolas. Gracias a eso, hoy se calculan los lanzamientos de balones, de jabalinas y hasta de cohetes. La misma curva se usa en las antenas parabólicas y en los faros de los coches, porque concentra o dispersa los rayos en un punto.

Leer una gráfica con atención

Método: interpretar una función en un problema

1. Identifica qué representa cada eje y en qué unidades se mide (minutos, euros, metros…).
2. Busca el significado de la ordenada en el origen: suele ser el valor inicial, una cuota fija o la cantidad de partida.
3. Interpreta la pendiente como lo que cambia la variable y cuando x aumenta una unidad.
4. Si hay dos funciones, el punto de corte indica cuándo valen lo mismo; a un lado del corte conviene una y al otro lado la otra.
5. Si la función es cuadrática, el vértice da el valor máximo o mínimo, que suele ser la respuesta a «¿cuándo es mayor?» o «¿cuál es el mejor precio?».

¡Atención!

No confundas el punto de corte con el eje Y, que se obtiene haciendo $x = 0$, con los cortes con el eje X, que se obtienen resolviendo $y = 0$. Y recuerda que una recta vertical, como $x = 2$, no es la gráfica de una función.

El consejo de Otto

La abscisa del vértice está siempre a mitad de camino entre los dos puntos de corte con el eje X (si existen). Úsalo para comprobar el cálculo.