Soluciones - Funciones lineales y cuadráticas

Curso: 3 Eso

Solución del ejercicio 1

a. Sí: cada x tiene un solo y. Cada vez que x aumenta 1, y aumenta 2, y con $x = 1$ vale 3: $y = 2x + 1$.
b. No: a $x = 1$ le corresponden dos valores, $y = 2$ e $y = 3$.
c. Pares: $(-2, 4)$, $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 4)$. Es función (aunque dos valores de x den el mismo y, cada x tiene un único y).
d. No: una recta vertical que pase por el interior de la circunferencia la corta en dos puntos, es decir, a ese valor de x le corresponden dos valores de y.

Solución del ejercicio 2

a. $f(0) = 5$; $f(3) = -6 + 5 = -1$; $f(-1) = 2 + 5 = 7$. Sustituimos cada valor de x en la expresión, cuidando los signos.
b. $-2x + 5 = 11$, $-2x = 6$, $x = -3$. Igualamos la expresión a 11 y despejamos. Comprobación: $f(-3) = 6 + 5 = 11$.
c. $-2x + 5 = 0$, $x = \dfrac{5}{2} = 2{,}5$. Es el punto donde la recta corta al eje X: $(2{,}5;\ 0)$.
d. $f(4) = -8 + 5 = -3$. Sí pertenece a la gráfica. Un punto pertenece a la gráfica si sus coordenadas cumplen la ecuación.

Solución del ejercicio 3

a. $m = 3$, $n = -2$. Creciente, porque $m > 0$. La recta corta al eje Y en $(0, -2)$.
b. $m = -\dfrac{1}{2}$, $n = 4$. Decreciente, porque m. Por cada 2 unidades que avanza x, y baja 1.
c. $m = 0$, $n = 5$. Constante: recta horizontal. El valor de y no depende de x.
d. $m = -4$, $n = 0$. Decreciente; pasa por el origen (proporcionalidad directa). La ordenada en el origen es cero, así que la recta pasa por $(0, 0)$.

Solución del ejercicio 4

a. $m = \dfrac{7 - 3}{3 - 1} = 2$. Con A: $3 = 2 + n$, $n = 1$. $y = 2x + 1$. Comprobación con B: $2 \cdot 3 + 1 = 7$.

b. $m = \dfrac{-3-5}{2-(-2)} = -2$. Con D: $-3 = -4 + n$, $n = 1$. $y = -2x + 1$. Comprobación con C: $-2 \cdot (-2) + 1 = 5$.
c. $n = 4$ (corta al eje Y en $(0, 4)$) y $m = \dfrac{1-4}{6-0} = -\dfrac{1}{2}$. $y = -\dfrac{1}{2}x + 4$. Comprobación con F: $-3 + 4 = 1$.
d. $m = \dfrac{9-5}{0}$ no existe: la recta es vertical, $x = 2$, y no es la gráfica de una función. Los dos puntos tienen la misma abscisa, así que no hay una y única para $x = 2$.

Solución del ejercicio 5

a. $x = -1$: -6; $x = 0$: -4; $x = 2$: 0; $x = 4$: 4.
b. Eje Y: $x = 0$, $y = -4$, punto $(0, -4)$. Eje X: $2x - 4 = 0$, $x = 2$, punto $(2, 0)$.
c. Se marcan $(0, -4)$ y $(2, 0)$ y se traza la recta que pasa por ellos, extendiéndola.
d. $2 \cdot 7 - 4 = 10$: sí pasa por $(7, 10)$. Las coordenadas cumplen la ecuación, así que el punto está en la recta.

Solución del ejercicio 6

a. Pendiente 3: $y = 3x + n$. Con $(1, 5)$: $5 = 3 + n$, $n = 2$. $y = 3x + 2$. Las rectas paralelas tienen la misma pendiente.
b. $x + 3 = -2x + 9$, $3x = 6$, $x = 2$ y $y = 5$. Punto $(2, 5)$. Igualamos las dos expresiones de y y despejamos x.
c. Tienen la misma pendiente y distinta ordenada: son paralelas y no se cortan.
d. Primera: $2 + 3 = 5$. Segunda: $-4 + 9 = 5$. Coinciden. El punto $(2, 5)$ está en las dos rectas.

Solución del ejercicio 7

a. $x_v = -\dfrac{-4}{2} = 2$ e $y_v = 4 - 8 + 3 = -1$. Vértice $V(2, -1)$.
b. Eje Y: $(0, 3)$. Eje X: $x^2 - 4x + 3 = 0$, $x = \dfrac{4 \pm 2}{2}$: $x = 1$ y $x = 3$.
c. $x = -1$: 8; $x = 0$: 3; $x = 1$: 0; $x = 2$: -1; $x = 3$: 0; $x = 4$: 3.
d. Como $a = 1 > 0$, las ramas van hacia arriba y el vértice es un mínimo. El eje de simetría es la recta $x = 2$.

Solución del ejercicio 8

a. $x_v = -\dfrac{6}{2 \cdot (-1)} = 3$ e $y_v = -9 + 18 - 5 = 4$. Vértice $V(3, 4)$. Usamos $x_v = -\dfrac{b}{2a}$

con $a = -1$ y $b = 6$, y sustituimos para hallar y_v.

b. $-x^2 + 6x - 5 = 0$ equivale a $x^2 - 6x + 5 = 0$, $x = \dfrac{6 \pm 4}{2}$: $x = 1$ y $x = 5$. Multiplicamos por -1 para trabajar con $a = 1$. Los cortes con el eje X son $(1, 0)$ y $(5, 0)$.

c. $x = 0$: $y = -5$. Punto $(0, -5)$. El corte con el eje Y es siempre el término independiente.

d. Como $a = -1$, las ramas van hacia abajo y el vértice es un máximo de valor 4. Respuesta: la función tiene un máximo en $V(3, 4)$, de valor 4.

Solución del ejercicio 9

a. Se unen los puntos $(0, 0)$, $(5, 400)$, $(10, 800)$, $(15, 800)$, $(20, 800)$ y $(25, 1\,200)$: la gráfica sube, se queda horizontal y vuelve a subir.

b. En 10 minutos recorre 800 m: $\dfrac{800}{10} = 80$ m/min.

c. Entre el minuto 10 y el 20 la distancia no cambia: está parada 10 minutos (por ejemplo, esperando a una amiga o en un semáforo).

d. Distancia total: 1 200 m. Velocidad media: $\dfrac{1\,200}{25} = 48$ m/min.

Solución del ejercicio 10

a. $A(x) = 6 + 0{,}04x$ y $B(x) = 0{,}10x$.

b. $A(150) = 6 + 6 = 12$ €. $6 + 0{,}04x = 14$, $0{,}04x = 8$, $x = 200$ minutos.

c. $6 + 0{,}04x = 0{,}10x$, $6 = 0{,}06x$, $x = 100$ minutos (10 € en las dos).

d. Con 60 min: A $= 8{,}40$ € y B $= 6$ €: conviene B. Con 300 min: A $= 18$ € y B $= 30$ €: conviene A.

Solución del ejercicio 11

a. $A(h) = 4 + 1{,}5h$ y $B(h) = 2{,}5h$.

b. $A(2) = 4 + 3 = 7$ € y $B(2) = 5$ €.

c. $4 + 1{,}5h = 2{,}5h$, $4 = h$. A las 4 horas ambas cuestan 10 €.

d. Las rectas se cortan en $(4, 10)$. Para menos de 4 horas la recta B está por debajo (conviene B); para más de 4 horas conviene A.

Solución del ejercicio 12

a. Consume $0{,}06$ L/km: $V(x) = 48 - 0{,}06x$. Por cada kilómetro consume $6 : 100 = 0{,}06$ litros, y partimos de 48 litros.

b. $V(400) = 48 - 24 = 24$ L. Respuesta: tras 400 km quedan 24 litros, la mitad del

depósito.
c. $48 - 0{,}06x = 6$, $0{,}06x = 42$, $x = 700$ km. Igualamos la función a 6 y despejamos. Respuesta: puede recorrer 700 km.
d. $48 - 0{,}06x = 0$, $x = 800$ km. La autonomía es la distancia que recorre hasta que el depósito se vacía. Respuesta: 800 km.

Solución del ejercicio 13

a. $T(h) = 19{,}5 - 6{,}5h$. Partimos de 19,5 °C y restamos 6,5 °C por cada kilómetro.
b. $T(2) = 19{,}5 - 13 = 6{,}5$ °C. Respuesta: a 2 km de altitud hace 6,5 °C.
c. $19{,}5 - 6{,}5h = 0$, $h = 3$ km. Igualamos a 0 y despejamos h. Respuesta: a 3 km de altitud.
d. Pendiente $-6{,}5$: baja 6,5 °C por kilómetro de subida. Ordenada 19,5: temperatura a nivel del mar.

Solución del ejercicio 14

a. $A(x) = x(20 - x) = -x^2 + 20x$. Es de segundo grado con $a = -1$.
b. $A(5) = 5 \cdot 15 = 75$ m^2 y $A(15) = 15 \cdot 5 = 75$ m^2 (misma área: simetría).
c. $x_v = -\dfrac{20}{2 \cdot (-1)} = 10$ e $y_v = 100$. El área máxima, 100 m^2, se logra con un cuadrado de 10 m de lado.
d. $-x^2 + 20x = 96$, $x^2 - 20x + 96 = 0$, $x = \dfrac{20 \pm 4}{2}$: $x = 12$ y $x = 8$ (huerto de 12 m por 8 m).

Solución del ejercicio 15

a. $I(p) = 200p - 4p^2 = -4p^2 + 200p$. Aplicamos la propiedad distributiva.
b. $I(10) = -400 + 2\,000 = 1\,600$ €. Con 10 € asisten 160 personas: $10 \cdot 160 = 1\,600$ €.
c. $p_v = -\dfrac{200}{2 \cdot (-4)} = 25$. Asisten $200 - 100 = 100$ personas y se recaudan $25 \cdot 100 = 2\,500$ €. El vértice de una parábola con a es un máximo.
d. $-4p^2 + 200p - 1\,600 = 0$, $p^2 - 50p + 400 = 0$, $p = \dfrac{50 \pm 30}{2}$: $p = 10$ € o $p = 40$ €. Respuesta: se recaudan 1 600 € con un precio de 10 € o de 40 €.

Solución del ejercicio 16

a. $-0{,}05x^2 + 2x = 0$, $x(-0{,}05x + 2) = 0$: $x = 0$ y $x = 40$. El puente mide 40 m.

b. $x_v = -\dfrac{2}{2 \cdot (-0{,}05)} = 20$ y $h(20) = -20 + 40 = 20$ m.
c. $h(10) = -5 + 20 = 15$ m.
d. El barco ocupa de $x = 10$ a $x = 30$. A esa distancia el arco solo tiene $h = 15$ m, menos de 16 m: no puede pasar. (Para 16 m, el ancho libre sería de unos $2\sqrt{80} \approx 17{,}9$ m.)

Solución del ejercicio 17

a. $C(x) = 200 + 4x$ e $I(x) = 9x$. El coste tiene una parte fija y una parte que depende del número de camisetas.
b. $B(x) = 9x - 200 - 4x = 5x - 200$. Cada camiseta deja un beneficio de 5 €, que es la pendiente.
c. $5x - 200 = 0$, $x = 40$ camisetas (punto de equilibrio). Igualamos el beneficio a cero. Respuesta: hay que vender 40 camisetas.
d. $B(100) = 500 - 200 = 300$ €. $5x - 200 = 500$, $5x = 700$, $x = 140$ camisetas. Respuesta: con 100 camisetas gana 300 €, y para ganar 500 € hay que vender 140.

Solución del ejercicio 18

a. $V_1(t) = 500 - 20t$ y $V_2(t) = 100 + 30t$.
b. $500 - 20t = 100 + 30t$, $400 = 50t$, $t = 8$ min. Cantidad: $500 - 160 = 340$ L (y $100 + 240 = 340$ L). Igualamos las dos expresiones y despejamos t.
c. $500 - 20t = 0$, $t = 25$ min. Igualamos V_1 a cero. Respuesta: se vacía a los 25 minutos.
d. Una recta baja y la otra sube. Se cortan en $(8, 340)$: a los 8 minutos los dos depósitos tienen 340 litros.

Solución del ejercicio 19

a. $-0{,}02x^2 + x = 0$, $x(-0{,}02x + 1) = 0$: $x = 0$ o $x = 50$. Cae a 50 m.
b. $x_v = -\dfrac{1}{2 \cdot (-0{,}02)} = 25$ m y $h(25) = -12{,}5 + 25 = 12{,}5$ m.
c. $-0{,}02x^2 + x = 8$, $x^2 - 50x + 400 = 0$, $x = \dfrac{50 \pm 30}{2}$: $x = 10$ m (subiendo) y $x = 40$ m (bajando).
d. A 40 m el balón está a 8 m de altura, muy por encima de los 2 m del defensa: no puede cabecear, el balón pasa por encima.

Solución del ejercicio 20

a. $(0,3)$: $c=3$. $(1,0)$: $1+b+3=0$, $b=-4$. La parábola es $y=x^2-4x+3$.
b. $x^2-4x+3=-x+3$, $x^2-3x=0$, $x(x-3)=0$: $x=0$ y $x=3$. Puntos $(0,3)$ y $(3,0)$.
c. Debe ser $\Delta=0$: $16-4k=0$, $k=4$. Entonces $y=(x+2)^2$ toca al eje en $(-2,0)$.
d. Cortes: $(0,6)$ y $(3,0)$. Triángulo rectángulo de catetos 3 y 6: área $=\dfrac{3\cdot 6}{2}=9$.