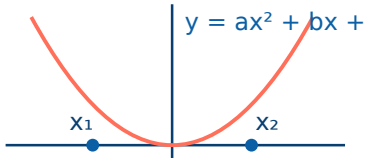
Apuntes - Ecuaciones de primer y segundo grado

Curso: 3 Eso

En este tema aprenderás: ecuaciones y soluciones, ecuaciones de primer grado, ecuaciones de segundo grado, resolución de problemas con ecuaciones y cómo elegir el método. Cada idea va en un cuadro de color, con ejemplos resueltos paso a paso.

Actividad de introducción: el precio justo de la excursión

Una clase de 3.º de ESO de Valencia organiza una excursión y alquila un autobús por 300 €. Si van 25 alumnos, cada uno paga 12 €. Pero algunos se apuntan tarde: con 30 alumnos, cada uno paga 10 €. Cuanta más gente va, menos paga cada uno, aunque el coste total no cambia. Si queremos saber cuántos alumnos tienen que ir para que cada uno pague exactamente 8 €, hay que resolver $\frac{300}{x} = 8$, una ecuación de primer grado. Pero si el dato es que, con 5 alumnos más, cada uno paga 2 € menos, la incógnita aparece en un denominador y la ecuación acaba siendo de segundo grado. Las ecuaciones de primer y segundo grado sirven para resolver este tipo de situaciones y muchas otras de la vida diaria: áreas, edades, velocidades, precios y trayectorias.



Ecuaciones y soluciones

Definición: ecuación

Una **ecuación** es una igualdad algebraica que solo se cumple para ciertos valores de la incógnita. Esos valores son las **soluciones**. Resolver una ecuación es encontrar todas sus soluciones. Dos ecuaciones son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones. Se obtienen ecuaciones equivalentes sumando o restando la misma expresión en los dos miembros, o multiplicando o dividiendo ambos miembros por un mismo número distinto de cero.

Ecuaciones de primer grado

Método: ecuaciones de primer grado

Tienen la forma $ax + b = 0$ con $a \neq 0$. Para resolverlas se siguen estos pasos:

1. Quitar paréntesis aplicando la propiedad distributiva.
2. Quitar denominadores multiplicando ambos miembros por el mínimo común múltiplo.
3. Pasar los términos con x a un miembro y los números al otro.
4. Reducir términos semejantes y despejar x.
5. Comprobar la solución sustituyendo en la ecuación original.

Ejemplo 1

$\frac{x+1}{3} - \frac{x-2}{4} = 1$.

El mcm es 12: $4(x+1) - 3(x-2) = 12$, es decir, $4x + 4 - 3x + 6 = 12$, luego $x + 10 = 12$ y $x = 2$.

Propiedad

No todas las ecuaciones de primer grado tienen una única solución. Si al simplificar se llega a una igualdad falsa, como $2 = 3$, la ecuación es **imposible** (no tiene solución). Si se llega a una igualdad siempre cierta, como $0 = 0$, es una **identidad** y tiene infinitas soluciones.

Ecuaciones de segundo grado

Regla

La forma general es $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$. Hay tres casos.

Propiedad: ecuaciones de segundo grado

- **Incompleta sin término en** x ($b = 0$): $ax^2 + c = 0$. Se despeja $x^2 = -\frac{c}{a}$ y se extrae la raíz: $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$. Si $-\frac{c}{a}$ no hay solución real.
- **Incompleta sin término independiente** ($c = 0$): $ax^2 + bx = 0$. Se saca factor común: $x(ax + b) = 0$, con soluciones $x = 0$ y $x = -\frac{b}{a}$. Por ejemplo $x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x = 0$ o $x = 5$.
- **Completa:** se usa la fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Propiedad

El **discriminante** $\Delta = b^2 - 4ac$ indica cuántas soluciones reales hay: si $\Delta > 0$, dos soluciones distintas; si $\Delta = 0$, una solución doble; si Δ, ninguna solución real.

Ejemplo 2

$2x^2 - 3x - 2 = 0$.

Aquí $a = 2$, $b = -3$, $c = -2$, $\Delta = 9 + 16 = 25$ y $x = \frac{3 \pm 5}{4}$, es decir, $x = 2$ y $x = -\frac{1}{2}$.

Regla

Si la ecuación está factorizada, $(x - 3)(x + 4) = 0$, basta igualar cada factor a cero porque un producto es cero solo si algún factor lo es: $x = 3$ o $x = -4$. Además, si x_1 y x_2 son las soluciones, su suma vale $-\frac{b}{a}$ y su producto $\frac{c}{a}$, lo que sirve para comprobar el resultado.

Cómo se hace: resolver una ecuación de segundo grado

1. Pasa todos los términos a un miembro y reduce hasta tener $ax^2 + bx + c = 0$.
2. Identifica a, b y c con su signo.
3. Si $b = 0$ o $c = 0$, resuelve como ecuación incompleta; si no, calcula $\Delta = b^2 - 4ac$.
4. Aplica $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ y calcula las dos soluciones.
5. Comprueba sustituyendo en la ecuación original.

Resolución de problemas con ecuaciones

Observación

Para plantear un problema: (1) lee el enunciado y decide qué es la incógnita; (2) escribe con ella las demás cantidades; (3) traduce la condición del enunciado a una ecuación; (4) resuélvela; (5) interpreta la solución y comprueba que cumple el enunciado (por ejemplo, una longitud no puede ser negativa); (6) responde con una frase y con las unidades.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 3

La suma de tres números consecutivos es 81.

Sea x el menor: $x + (x + 1) + (x + 2) = 81$, $3x + 3 = 81$, $x = 26$. Los números son 26, 27 y 28.

Ejemplo 4

Un rectángulo tiene 34 m de perímetro y 60 m^2 de área.

Si un lado mide x, el otro mide $17 - x$ y $x(17 - x) = 60$, es decir, $x^2 - 17x + 60 = 0$. Entonces $\Delta = 289 - 240 = 49$ y $x = \frac{17 \pm 7}{2}$, que da 12 y 5. Las dimensiones son 12 m y 5 m.

Ejemplo 5

$x^2 + 2x + 5 = 0$

$\Delta = 4 - 20 = -16$, no tiene soluciones reales.

Cómo elegir el método

Observación

Ante una ecuación de segundo grado, lo primero es llevarla a la forma $ax^2 + bx + c = 0$, pasando todo a un miembro y reduciendo términos. Después observa qué coeficientes son cero. Si falta b, despeja x^2; si falta c, saca factor común x; si no falta ninguno, aplica la fórmula, aunque a veces se puede factorizar mentalmente buscando dos números que sumen $-b$ y multipliquen c (cuando $a = 1$). Por ejemplo, en $x^2 - 5x + 6 = 0$ los números 2 y 3 suman 5 y multiplican 6, así que las soluciones son 2 y 3.

Regla

Si todos los coeficientes tienen un divisor común, divide la ecuación entre él para trabajar con números más pequeños: $3x^2 - 12x + 9 = 0$ equivale a $x^2 - 4x + 3 = 0$. Con ecuaciones de segundo grado en problemas geométricos, descarta las soluciones negativas, porque una longitud nunca puede ser negativa. En problemas de movimiento, como el de un balón lanzado hacia arriba, ambas soluciones pueden tener sentido: una indica el instante de salida y otra el de llegada al suelo.

- Al cambiar un término de miembro, olvidar cambiarle el signo.
- Multiplicar solo algún término por el mcm al quitar denominadores.
- En $x^2 = 9$ dar solo la solución 3 y olvidar -3.
- Dividir por x en $x^2 - 5x = 0$ y perder la solución $x = 0$.
- Equivocarse con los signos de b y c al aplicar la fórmula, sobre todo con $-b$ y b^2.

Ecuaciones con denominadores que contienen la incógnita

Método: ecuaciones con x en el denominador

1. Indica qué valores no puede tomar x (los que anulan algún denominador).
2. Multiplica los dos miembros por el mínimo común múltiplo de los denominadores.
3. Desarrolla y escribe la ecuación en la forma $ax^2 + bx + c = 0$.
4. Resuelve y comprueba que las soluciones no anulan ningún denominador.

Ejemplo 6

Resuelve $\frac{x}{x-1} = \frac{6}{x}$.

Debe ser $x \neq 0$ y $x \neq 1$. Multiplicamos por $x(x-1)$: $x^2 = 6(x-1)$, luego $x^2 - 6x + 6 = 0$. $\Delta = 36 - 24 = 12$ y $x = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{2} = 3 \pm \sqrt{3}$. Las dos soluciones son válidas porque ninguna es 0 ni 1.

El discriminante y el número de soluciones

Propiedad: discriminante

En $ax^2 + bx + c = 0$ el discriminante es $\Delta = b^2 - 4ac$. Si $\Delta > 0$ hay dos soluciones reales distintas; si $\Delta = 0$ hay una solución doble, $x = -\frac{b}{2a}$; si Δ no hay soluciones reales. Además, las dos soluciones cumplen $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ y $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, lo que permite comprobarlas con rapidez.

Ejemplo 7

Resuelve $x^2 - 7x + 10 = 0$ y comprueba con la suma y el producto de las soluciones.

$\Delta = 49 - 40 = 9$ y $x = \frac{7 \pm 3}{2}$, con lo que $x = 5$ y $x = 2$. Suma: $5 + 2 = 7 = -\frac{b}{a}$. Producto: $5 \cdot 2 = 10 = \frac{c}{a}$. Las dos relaciones se cumplen.

- Dividir los dos miembros entre x en $x^2 = 5x$: se pierde la solución $x = 0$. Hay que sacar factor común.
- Olvidar que $\sqrt{x^2}$ da dos soluciones, $+$ y $-$, en $x^2 = 49$.
- Dejar de comprobar las soluciones de un problema: una longitud o una edad no pueden ser negativas.
- Equivocarse con el signo de b en la fórmula: es $-b$, de modo que si $b = -5$ se escribe $+5$.

¿Sabías que?

La palabra «álgebra» procede del título de un libro del matemático persa Al-Juarismi, escrito en el siglo IX, donde explicaba cómo resolver ecuaciones de primer y segundo grado. Los babilonios ya resolvían problemas equivalentes hace casi 4 000 años,

aunque sin letras ni fórmula general. Hoy las ecuaciones de segundo grado describen la trayectoria de un balón, la forma de las antenas parabólicas y los puentes colgantes.

Resolver problemas con ecuaciones

Método: de un enunciado a una ecuación

1. Lee el enunciado completo dos veces y subraya lo que te preguntan.
2. Elige la incógnita y escribe con palabras lo que representa, por ejemplo «x = número de alumnos».
3. Traduce cada frase del enunciado a una expresión con x y busca la igualdad que relaciona las cantidades.
4. Resuelve la ecuación con el método más cómodo: despejar, sacar factor común o aplicar la fórmula.
5. Descarta las soluciones que no tengan sentido (longitudes negativas, personas decimales...) y escribe una frase con la respuesta.
6. Comprueba el resultado en el enunciado, no solo en la ecuación.

Ejemplo 8

Un número natural más su cuadrado da 56. ¿Qué número es?

Llamamos x al número. La ecuación es $x + x^2 = 56$, que ordenada queda $x^2 + x - 56 = 0$. Calculamos el discriminante: $\Delta = 1 + 224 = 225$, cuya raíz es 15. Entonces $x = \dfrac{-1 \pm 15}{2}$, que da $x = 7$ o $x = -8$. Como buscamos un número natural, descartamos -8. La respuesta es 7, y lo comprobamos: $7 + 49 = 56$.

¡Atención!

Nunca dividas los dos miembros de una ecuación entre x para simplificar: en $x^2 = 5x$ perderías la solución $x = 0$. Lo correcto es pasar todo a un miembro, $x^2 - 5x = 0$, y sacar factor común: $x(x - 5) = 0$, con soluciones 0 y 5. Tampoco olvides el doble signo al hacer una raíz cuadrada: si $x^2 = 16$, entonces $x = 4$ o $x = -4$.

El consejo de Otto

Comprueba siempre sustituyendo la solución en el enunciado del problema y no solo en la ecuación: así detectas soluciones que matemáticamente valen pero que no tienen sentido, como una edad negativa.