Soluciones - Ecuaciones de primer y segundo grado

Curso: 3 Eso

Solución del ejercicio 1

a. $3 \cdot 5 - 5 = 10$. Se cumple: $x = 5$ es solución. Los dos miembros valen 10, así que la igualdad es cierta.
b. Miembro izquierdo: $2 \cdot 5 = 10$; derecho: $4 + 7 = 11$. No coinciden: $x = 4$ no es solución. (La solución es $x = 5$.) Una solución tiene que hacer iguales los dos miembros.
c. $2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$. Sí es solución. Al sustituir, el polinomio se anula: $x = 2$ es solución.
d. $(-1)^2 + (-1) - 2 = 1 - 1 - 2 = -2 \neq 0$. No es solución. El resultado es -2 y no cero, así que la igualdad es falsa.

Solución del ejercicio 2

a. $5x = 25$, $x = 5$. Comprobación: $25 - 7 = 18$. Pasamos el -7 sumando al otro miembro y dividimos entre 5. Solución: $x = 5$.
b. $3x - 2x = -9 - 4$, $x = -13$. Comprobación: $-39 + 4 = -35$ y $-26 - 9 = -35$. Restamos $2x$ en los dos miembros y restamos 4. Los dos miembros valen -35. Solución: $x = -13$.
c. $4x - 12 = 2x + 6$, $2x = 18$, $x = 9$. Comprobación: $4 \cdot 6 = 24$ y $18 + 6 = 24$. Primero quitamos el paréntesis multiplicando 4 por cada término; después agrupamos. Solución: $x = 9$.
d. $-2x = 3 - 9 = -6$, $x = 3$. Comprobación: $-6 + 9 = 3$. Restamos 9 en los dos miembros y dividimos entre -2; menos entre menos da más. Solución: $x = 3$.

Solución del ejercicio 3

a. Multiplicamos por 6: $3x + 2x = 60$, $5x = 60$, $x = 12$. Una solución. Comprobación: $6 + 4 = 10$.
b. Multiplicamos por 12: $3(x + 1) - 2(x - 2) = 12$, $3x + 3 - 2x + 4 = 12$, $x + 7 = 12$, $x = 5$. Comprobación: $\frac{6}{4} - \frac{3}{6} = 1{,}5 - 0{,}5 = 1$. Una solución.
c. Desarrollamos: $3x - 6 - 2x - 2 = x - 4$, es decir, $x - 8 = x - 4$. Restando x: $-8 = -4$, que es falso. No tiene solución. Una igualdad falsa indica que ningún número la cumple.
d. Desarrollamos: $2x + 6 = 2x + 6$. Es una identidad: tiene infinitas soluciones (cualquier número). Los dos miembros son idénticos, así que se cumple para todo

x.

Solución del ejercicio 4

a. $x^2 = 49$, $x = \pm 7$. Pasamos 49 al otro miembro y hacemos la raíz cuadrada sin olvidar el doble signo. Soluciones: $x = 7$ y $x = -7$.
b. $3x^2 = 27$, $x^2 = 9$, $x = \pm 3$. Despejamos x^2 dividiendo entre 3. Comprobación: $3 \cdot 9 - 27 = 0$. Soluciones: $x = 3$ y $x = -3$.
c. $x(x-5) = 0$: $x = 0$ o $x = 5$. Un producto vale cero si alguno de sus factores es cero. Comprobación con 5: $25 - 25 = 0$. Soluciones: 0 y 5.
d. $2x(x+4) = 0$: $x = 0$ o $x = -4$. Sacamos factor común $2x$ e igualamos cada factor a cero. Comprobación con -4: $32 - 32 = 0$. Soluciones: 0 y -4.

Solución del ejercicio 5

a. $a = 1,\ b = -5,\ c = 6$. $\Delta = 25 - 24 = 1$. $x = \dfrac{5 \pm 1}{2}$: $x = 3$ y $x = 2$. Comprobación: $9 - 15 + 6 = 0$.
b. $a = 1,\ b = 2,\ c = -15$. $\Delta = 4 + 60 = 64$. $x = \dfrac{-2 \pm 8}{2}$: $x = 3$ y $x = -5$. Comprobación con -5: $25 - 10 - 15 = 0$.
c. $a = 2,\ b = -7,\ c = 3$. $\Delta = 49 - 24 = 25$. $x = \dfrac{7 \pm 5}{4}$: $x = 3$ y $x = \dfrac{1}{2}$. Comprobación con 3: $18 - 21 + 3 = 0$.
d. $a = 1,\ b = -4,\ c = 4$. $\Delta = 16 - 16 = 0$. $x = \dfrac{4}{2} = 2$ (solución doble). Como el discriminante es cero, hay una sola solución: $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$.

Solución del ejercicio 6

a. $\Delta = 16 - 28 = -12$. No tiene soluciones reales. Un discriminante negativo no tiene raíz cuadrada real, por eso la fórmula no da ningún número.
b. $\Delta = 1 + 24 = 25$. $x = \dfrac{1 \pm 5}{6}$: $x = 1$ y $x = -\dfrac{2}{3}$. El discriminante es positivo, así que hay dos soluciones distintas. Comprobación con 1: $3 - 1 - 2 = 0$.
c. Debe ser $\Delta = 0$: $36 - 4k = 0$, $k = 9$. Entonces $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$ y $x = -3$. Una solución única corresponde siempre a un discriminante nulo. Respuesta: $k = 9$.
d. $\Delta = 36 - 40 = -4$: no tiene soluciones reales. Al aumentar k por encima de 9, el discriminante se hace negativo. Respuesta: con $k = 10$ la ecuación no tiene solución real.

Solución del ejercicio 7

a. $x^2 - x - 6 = 14$, $x^2 - x - 20 = 0$. $\Delta = 1 + 80 = 81$, $x = \dfrac{1 \pm 9}{2}$: $x = 5$ y $x = -4$.
Primero desarrollamos el producto y pasamos el 14 al primer miembro. Comprobación: $7 \cdot 2 = 14$.

b. $x^2 + 4x - 45 = 0$. $\Delta = 16 + 180 = 196$, $x = \dfrac{-4 \pm 14}{2}$: $x = 5$ y $x = -9$.
Comprobación con 5: $5 \cdot 9 = 45$.

c. Sin desarrollar: $x - 1 = \pm 4$, así que $x = 5$ y $x = -3$. Hacemos la raíz cuadrada de los dos miembros, con doble signo, y despejamos x. Comprobación: $4^2 = 16$ y $(-4)^2 = 16$.

d. $x^2 - 3x - 10 = 0$. $\Delta = 9 + 40 = 49$, $x = \dfrac{3 \pm 7}{2}$: $x = 5$ y $x = -2$. Pasamos todos los términos al primer miembro. Comprobación con 5: $25 = 15 + 10$.

Solución del ejercicio 8

a. $x^2 + 6 = 5x$, $x^2 - 5x + 6 = 0$, $x = 2$ y $x = 3$. Multiplicamos los dos miembros por x y ordenamos. El discriminante es $25 - 24 = 1$, así que $x = \dfrac{5 \pm 1}{2}$.

b. $12 = x^2 + x$, $x^2 + x - 12 = 0$. $\Delta = 1 + 48 = 49$, $x = \dfrac{-1 \pm 7}{2}$: $x = 3$ y $x = -4$.
Ninguna solución anula el denominador, así que las dos son válidas.
Comprobación con -4: $\dfrac{12}{-4} = -3 = -4 + 1$.

c. Con $x = 2$: $2 + 3 = 5$. Con $x = 3$: $3 + 2 = 5$. Las dos valen. Ninguna anula el denominador, de modo que las dos soluciones son válidas.

Solución del ejercicio 9

a. Hija: x. Madre: $3x$. «Triple» significa multiplicar por 3.

b. Dentro de 6 años: $(x + 6) + (3x + 6) = 64$. Las dos personas cumplen 6 años más, por eso sumamos 6 a cada edad.

c. $4x + 12 = 64$, $4x = 52$, $x = 13$. La hija tiene 13 años y la madre 39. Agrupamos los términos en x y despejamos.

d. Dentro de 6 años: $19 + 45 = 64$. La madre tenía $39 - 13 = 26$ años cuando nació su hija. La diferencia de edad entre ellas, 26 años, no cambia nunca.

Solución del ejercicio 10

a. Manzanas: x €/kg. Peras: $x + 0{,}6$ €/kg. El precio de las peras es el de las manzanas más 0,60 €.

b. $3x + 2(x + 0{,}6) = 11{,}2$. El coste total es el coste de las manzanas más el de las peras.
c. $3x + 2x + 1{,}2 = 11{,}2$, $5x = 10$, $x = 2$. Manzanas: 2 €/kg; peras: $2{,}60$ €/kg. Comprobación: $6 + 5{,}20 = 11{,}20$. Quitamos el paréntesis, agrupamos $3x + 2x = 5x$ y despejamos x.
d. $5 \cdot 2{,}6 = 13$ €. Multiplicamos el número de kilos por el precio del kilo de peras. Respuesta: pagaría 13 €.

Solución del ejercicio 11

a. Con x alumnos paga $\frac{360}{x}$; con $x + 6$ paga $\frac{360}{x+6}$. Paga menos cuantos más alumnos hay.
b. $\frac{360}{x} - \frac{360}{x+6} = 2$. Multiplicamos por $x(x + 6)$: $360(x + 6) - 360x = 2x(x + 6)$, es decir, $2\,160 = 2x^2 + 12x$ y $x^2 + 6x - 1\,080 = 0$. La diferencia entre lo que paga cada uno en los dos casos es de 2 €.
c. $\Delta = 36 + 4\,320 = 4\,356 = 66^2$. $x = \frac{-6 \pm 66}{2}$: $x = 30$ o $x = -36$. Se descarta la negativa: van 30 alumnos. Un número de personas no puede ser negativo.
d. Con 30 alumnos: $360 : 30 = 12$ € cada uno. Con 36: $360 : 36 = 10$ €, que son 2 € menos. Respuesta: cada alumno paga 12 €, y pagaría 10 € si fueran 36.

Solución del ejercicio 12

a. $x(x + 5) = 84$, es decir, $x^2 + 5x - 84 = 0$. El área de un rectángulo es el ancho por el largo, y el largo es $x + 5$.
b. $\Delta = 25 + 336 = 361 = 19^2$. $x = \frac{-5 \pm 19}{2}$: $x = 7$ o $x = -12$. Solo vale $x = 7$ (una longitud no es negativa). Comprobación: $7 \cdot 12 = 84$.
c. Ancho 7 m y largo 12 m. Perímetro: $2(7 + 12) = 38$ m. El perímetro es la suma de los cuatro lados: dos anchos y dos largos.
d. $38 \cdot 12 = 456$ €. Multiplicamos los metros de valla por el precio de cada metro. Respuesta: cercar el jardín cuesta 456 €.

Solución del ejercicio 13

a. Tiempo $= \frac{60}{v}$ y $\frac{60}{v+5}$. Usamos que el tiempo es la distancia dividida entre la velocidad.
b. $\frac{60}{v} - \frac{60}{v+5} = 1$. Multiplicamos por $v(v + 5)$: $300 = v^2 + 5v$, es decir, $v^2 + 5v - 300 = 0$. La diferencia entre los dos tiempos es de 1 hora.

c. $\Delta = 25 + 1\,200 = 1\,225 = 35^2$. $v = \dfrac{-5 \pm 35}{2}$: $v = 15$ (la otra, -20, no es válida). Velocidad inicial: 15 km/h. Una velocidad no puede ser negativa.
d. A 15 km/h: $60 : 15 = 4$ h. A 20 km/h: $60 : 20 = 3$ h. Ahorra 1 hora. La diferencia es exactamente 1 hora, lo que confirma la solución.

Solución del ejercicio 14

a. $-5t^2 + 20t = 0$, $-5t(t-4) = 0$: $t = 0$ (lanzamiento) y $t = 4$ s. Sacamos factor común $-5t$ e igualamos cada factor a cero. Respuesta: el balón vuelve al suelo a los 4 segundos.
b. $-5t^2 + 20t = 15$, $t^2 - 4t + 3 = 0$, $t = \dfrac{4 \pm 2}{2}$: $t = 1$ s (sube) y $t = 3$ s (baja). Pasamos el 15 al primer miembro y dividimos entre -5. Respuesta: está a 15 m a los 1 s y a los 3 s.
c. $h(2) = -20 + 40 = 20$ m (es la altura máxima, a mitad del vuelo). Sustituimos $t = 2$ en la fórmula de la altura.
d. $-5t^2 + 20t = 25$ da $t^2 - 4t + 5 = 0$ con $\Delta = 16 - 20 = -4$: no tiene solución. No llega a 25 m. Un discriminante negativo indica que la altura nunca toma ese valor, porque la máxima es 20 m.

Solución del ejercicio 15

a. $(40 + 2x)$ por $(30 + 2x)$ centímetros. El marco añade x por cada lado, así que cada dimensión aumenta $2x$.
b. $(40 + 2x)(30 + 2x) - 40 \cdot 30 = 800$, es decir, $(40 + 2x)(30 + 2x) = 2\,000$. Desarrollando: $4x^2 + 140x + 1\,200 = 2\,000$ y $x^2 + 35x - 200 = 0$. Dividimos entre 4 para simplificar la ecuación.
c. $\Delta = 1\,225 + 800 = 2\,025 = 45^2$. $x = \dfrac{-35 \pm 45}{2}$: $x = 5$ (la otra solución es -40). El marco mide 5 cm de ancho. Una anchura no puede ser negativa.
d. Dimensiones: $50 \cdot 40 = 2\,000$ cm^2. Marco: $2\,000 - 1\,200 = 800$ cm^2. Respuesta: el marco tiene 5 cm de ancho.

Solución del ejercicio 16

a. El siguiente impar es $x + 2$. Dos impares consecutivos se diferencian en 2 unidades.
b. $x(x+2) = 143$, $x^2 + 2x - 143 = 0$. $\Delta = 4 + 572 = 576 = 24^2$. $x = \dfrac{-2 \pm 24}{2}$: $x = 11$ o $x = -13$. Hay dos soluciones porque la ecuación es de segundo grado.
c. Si $x = 11$: la pareja es 11 y 13. Si $x = -13$: la pareja es -13 y -11. Cada solución de la ecuación da una pareja distinta.

d. $11 \cdot 13 = 143$ y también $(-13) \cdot (-11) = 143$. Respuesta: los números positivos son 11 y 13.

Solución del ejercicio 17

a. $\frac{600}{x}$ y $\frac{600}{x+2}$. El precio total se reparte entre el número de amigos.
b. $\frac{600}{x} - \frac{600}{x+2} = 10$. Multiplicamos por $x(x+2)$: $1\,200 = 10x(x+2)$, $10x^2 + 20x - 1\,200 = 0$ y, dividiendo entre 10, $x^2 + 2x - 120 = 0$. La diferencia entre los dos precios por persona es de 10 €.
c. $\Delta = 4 + 480 = 484 = 22^2$. $x = \frac{-2 \pm 22}{2}$: $x = 10$ o $x = -12$. El número de personas no puede ser negativo: $x = 10$. Comprobación: $100 + 20 - 120 = 0$.
d. Ahora: $600 : 10 = 60$ € cada uno. Con 12: $600 : 12 = 50$ €. Respuesta: ahora paga cada uno 60 €; con dos amigos más pagarían 50 €.

Solución del ejercicio 18

a. $x^2 + (x+5)^2 = 25^2$, es decir, $x^2 + x^2 + 10x + 25 = 625$. La diagonal es la hipotenusa del triángulo rectángulo formado por el ancho y el largo.
b. $2x^2 + 10x - 600 = 0$; al dividir entre 2: $x^2 + 5x - 300 = 0$. Pasamos 625 al primer miembro y reducimos.
c. $\Delta = 25 + 1\,200 = 1\,225 = 35^2$. $x = \frac{-5 \pm 35}{2}$: $x = 15$ (la otra es -20). El patio mide 15 m por 20 m. Solo vale la solución positiva porque es una longitud.
d. Área: $15 \cdot 20 = 300$ m^2. Perímetro: $2(15 + 20) = 70$ m. Comprobación: $15^2 + 20^2 = 225 + 400 = 625 = 25^2$. Respuesta: el patio tiene 300 m^2 y 70 m de perímetro.

Solución del ejercicio 19

a. El segundo tarda $x + 3$ horas. En una hora llenan $\frac{1}{x}$ y $\frac{1}{x+3}$ del depósito.
b. Juntos llenan en una hora la mitad del depósito: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{1}{2}$.
c. Multiplicamos por $2x(x+3)$: $2(x+3) + 2x = x(x+3)$, $4x + 6 = x^2 + 3x$, $x^2 - x - 6 = 0$. $x = \frac{1 \pm 5}{2}$: $x = 3$ o $x = -2$. Vale $x = 3$: el primero tarda 3 h y el segundo 6 h.
d. En una hora: $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$. Tardan 2 horas. Respuesta: el primer grifo tarda 3 horas y el segundo 6 horas.

Solución del ejercicio 20

a. $9 + 3b - 12 = 0$, $b = 1$. La ecuación es $x^2 + x - 12 = 0$ y las soluciones suman -1: la otra es -4 (comprobación: $3 \cdot (-4) = -12$).

b. Si uno es x, el otro es $17 - x$: $x(17 - x) = 60$, $x^2 - 17x + 60 = 0$.
$\Delta = 289 - 240 = 49$, $x = \dfrac{17 \pm 7}{2}$: 12 y 5. Los números son 12 y 5.

c. $z^2 - 13z + 36 = 0$: $\Delta = 169 - 144 = 25$, $z = \dfrac{13 \pm 5}{2}$: $z = 9$ o $z = 4$. Entonces $x = \pm 3$ o $x = \pm 2$.

d. Debe ser $\Delta = 0$: $k^2 - 36 = 0$, $k = 6$ o $k = -6$. Entonces $x^2 \pm 6x + 9 = (x \pm 3)^2$.