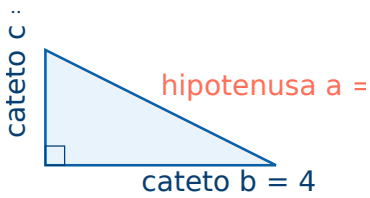
Apuntes - Teorema de Pitágoras

Curso: 2 Eso

El teorema de Pitágoras relaciona los lados de un triángulo rectángulo y permite calcular distancias que no se pueden medir directamente.

Actividad de introducción: el marco de la ventana

Nuria quiere comprobar si el marco de una ventana, de 90 cm de ancho y 120 cm de alto, está bien escuadrado, es decir, si sus esquinas son ángulos rectos. Mide las diagonales: si miden 150 cm, el marco es perfecto, porque $90^2 + 120^2 = 8\,100 + 14\,400 = 22\,500 = 150^2$. Ese es el teorema de Pitágoras en acción. Los albañiles, los carpinteros y los agrimensores llevan miles de años usando relaciones como 3-4-5 para trazar ángulos rectos con una cuerda. En este tema aprenderás a usar el teorema para calcular longitudes, a comprobar si un triángulo es rectángulo y a resolver problemas con escaleras, diagonales y distancias.



Triángulos rectángulos

Definición: catetos e hipotenusa

Un **triángulo rectángulo** tiene un ángulo de 90°. Los lados que lo forman son los **catetos**; el lado opuesto, el mayor, es la **hipotenusa**.

El teorema de Pitágoras

Teorema de Pitágoras

En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos: $a^2 = b^2 + c^2$, siendo a la hipotenusa.

Ejemplo 1

Los catetos de un triángulo rectángulo miden 6 y 8 cm. Calcula la hipotenusa.

$a^2 = 36 + 64 = 100$, $a = 10$ cm.

Cómo calcular un lado desconocido

Método: aplicar el teorema

1. Dibuja el triángulo e identifica la hipotenusa.
2. Escribe $a^2 = b^2 + c^2$.
3. Sustituye y despeja. Si falta un cateto, $c^2 = a^2 - b^2$.
4. Calcula la raíz cuadrada.

Ejemplo 2

La hipotenusa mide 13 cm y un cateto 5 cm. Calcula el otro cateto.

$c^2 = 169 - 25 = 144$, $c = 12$ cm.

Ternas pitagóricas

Definición: terna pitagórica

Una **terna pitagórica** son tres números naturales (a, b, c) con $a^2 = b^2 + c^2$. Son ternas $(3, 4, 5)$, $(5, 12, 13)$, $(8, 15, 17)$ y sus múltiplos, como $(6, 8, 10)$.

Recíproco del teorema

Recíproco del teorema

Si en un triángulo se cumple $a^2 = b^2 + c^2$ con a el lado mayor, el triángulo es **rectángulo**. Si $a^2 > b^2 + c^2$ es obtusángulo; si a^2 es acutángulo.

Ejemplo 3

¿Es rectángulo un triángulo de lados 9, 12 y 15?

$15^2 = 225$ y $9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$. Sí es rectángulo.

Aplicaciones del teorema

Propiedad: aplicaciones

Se usa para la **diagonal de un rectángulo** $d = \sqrt{b^2 + h^2}$, la **altura de un triángulo isósceles o equilátero**, la **distancia entre dos puntos** $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ y la **diagonal de un cubo** o de un prisma.

Ejemplo 4

Calcula la altura de un triángulo equilátero de lado 10 cm.

La altura divide la base en dos de 5 cm: $h^2 = 100 - 25 = 75$, $h = \sqrt{75} \approx 8{,}66$ cm.

Ejemplo 5

Calcula la distancia entre $A(1, 2)$ y $B(4, 6)$.

$d = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Por qué funciona: una idea de la demostración

Observación

Un cuadrado de lado $b + c$ se puede llenar con cuatro triángulos rectángulos iguales y un cuadrado de lado a en el centro, o con los mismos cuatro triángulos y dos cuadrados de lados b y c. Las áreas restantes deben ser iguales: $a^2 = b^2 + c^2$.

Problemas con contexto

Ejemplo 6

Una escalera de 5 m se apoya en una pared con el pie a 3 m. ¿A qué altura llega?

$h^2 = 25 - 9 = 16$, $h = 4$ m.

¡Atención!

La hipotenusa siempre es el lado mayor y va sola en un miembro. $a^2 = b^2 + c^2$ no es $a = b + c$. Y el teorema solo vale en triángulos rectángulos.

Triángulos rectángulos y su vocabulario

Definición: catetos e hipotenusa

Un triángulo es **rectángulo** si uno de sus ángulos mide 90°. Los lados que forman el ángulo recto se llaman **catetos** y el lado opuesto al ángulo recto, que es siempre el mayor, se llama **hipotenusa**. En un triángulo rectángulo los otros dos ángulos son agudos y suman 90°.

El teorema y sus tres formas de usarlo

Regla: el teorema de Pitágoras

En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos: $a^2 = b^2 + c^2$. De aquí salen tres fórmulas: $a = \sqrt{b^2 + c^2}$ para la hipotenusa, $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ y $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ para un cateto. Hay que recordar que la hipotenusa va sola en un miembro y los catetos suman en el otro.

Ejemplo 7

Calcula la hipotenusa de un triángulo rectángulo con catetos de 8 cm y 15 cm y el cateto de otro con hipotenusa 26 cm y cateto 10 cm.

Hipotenusa: $a = \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{64 + 225} = \sqrt{289} = 17$ cm. Cateto: $b = \sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{676 - 100} = \sqrt{576} = 24$ cm.

Método: aplicar el teorema a un problema

1. Dibuja un esquema y marca el ángulo recto.
2. Identifica la hipotenusa (el lado opuesto al ángulo recto) y los catetos.
3. Escribe $a^2 = b^2 + c^2$ con los datos y despeja la incógnita.
4. Haz la raíz cuadrada y redondea según lo que se pida.
5. Escribe la respuesta con unidades y comprueba que la hipotenusa es mayor que cada cateto.

¡Atención!

- Sumar los lados en vez de sus cuadrados: $3 + 4 \neq 5$, pero $3^2 + 4^2 = 5^2$.
- Confundir la hipotenusa con un cateto y sumar cuando hay que restar.
- Olvidar la raíz cuadrada al final y dar a^2 en lugar de a.
- Aplicar el teorema a triángulos que no son rectángulos.
- Dar un cateto mayor que la hipotenusa: señal de que algo está mal.

Ternas pitagóricas y recíproco

Propiedad: el recíproco del teorema

Si en un triángulo de lados $a \geq b \geq c$ se cumple $a^2 = b^2 + c^2$, el triángulo es rectángulo, y su ángulo recto es el opuesto al lado mayor. Si a^2, el triángulo es acutángulo y si $a^2 > b^2 + c^2$ es obtusángulo. Las ternas de números enteros que cumplen la igualdad, como $(3, 4, 5)$, $(5, 12, 13)$ o $(8, 15, 17)$, se llaman ternas pitagóricas, y sus múltiplos también lo son.

Ejemplo 8

Comprueba si un triángulo de lados 8, 15 y 17 es rectángulo, y si lo es uno de lados 6, 7 y 10.

Primero: $17^2 = 289$ y $8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289$. Es rectángulo. Segundo: $10^2 = 100$ y $6^2 + 7^2 = 36 + 49 = 85$. No es rectángulo, es obtusángulo.

Aplicaciones geométricas

Diagonales, alturas y distancias

El teorema permite calcular la diagonal de un rectángulo ($d = \sqrt{l^2 + a^2}$), la de un cuadrado ($d = l\sqrt{2}$), la altura de un triángulo isósceles o equilátero (dividiéndolo en dos triángulos rectángulos) y la distancia entre dos puntos de coordenadas conocidas. En un cuerpo geométrico, la diagonal de un ortoedro de aristas a, b y c vale $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, que se obtiene aplicando el teorema dos veces.

Ejemplo 9

Calcula la altura de un triángulo equilátero de 8 cm de lado y su área.

La altura divide la base en dos mitades de 4 cm: $h = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \approx 6{,}93$ cm. Área: $\dfrac{8 \cdot 6{,}93}{2} \approx 27{,}71$ cm².

¿Sabías que?

Aunque el teorema lleva el nombre del griego Pitágoras, que vivió en el siglo VI antes de nuestra era, los babilonios ya conocían ternas pitagóricas mil años antes: una tablilla de arcilla llamada Plimpton 322 contiene una lista de ellas. Se conocen más de 300 demostraciones distintas del teorema, entre ellas una del presidente de Estados Unidos James Garfield. Los antiguos agrimensores egipcios usaban una cuerda con 12 nudos equidistantes para formar un triángulo de lados 3, 4 y 5 y trazar así ángulos rectos.

Estimar antes de calcular

Antes de usar la calculadora, estima el resultado: si los catetos miden 3 y 5, la hipotenusa debe ser mayor que 5 y menor que 8 (la suma de los catetos). Como $\sqrt{34}$ está entre $\sqrt{25} = 5$ y $\sqrt{36} = 6$, el resultado 5,83 es razonable. Esta comprobación rápida permite detectar errores como olvidar una raíz o restar en lugar de sumar. En los problemas de la vida real, redondea al número de decimales que tenga sentido: una escalera se mide en centímetros, no en milésimas de milímetro.

Una idea de por qué funciona

Si construimos un cuadrado de lado $b+c$ y colocamos dentro cuatro triángulos rectángulos iguales de catetos b y c, queda un cuadrado inclinado de lado a. El área total $(b+c)^2$ es igual a la de los cuatro triángulos $4 \cdot \dfrac{bc}{2} = 2bc$ más el cuadrado interior a^2. Entonces $b^2 + 2bc + c^2 = 2bc + a^2$ y, restando $2bc$, queda $a^2 = b^2 + c^2$.

Pitágoras en el espacio

El teorema de Pitágoras también sirve en tres dimensiones. Para calcular la diagonal de una caja, de una habitación o de un ortoedro cualquiera se aplica dos veces: primero en la base y después en el triángulo rectángulo que forman la diagonal de la base, la altura y la diagonal del cuerpo.

Regla: diagonal de un ortoedro

Si un ortoedro tiene aristas a, b y c, la diagonal de la base mide $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ y la diagonal del ortoedro mide $D = \sqrt{d^2 + c^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. En un cubo de arista a, $D = a\sqrt{3}$.

Ejemplo 10

¿Cabe una barra de 3,5 m en una habitación de 3 m de largo, 2 m de ancho y 1,5 m de alto, sin doblarla?

La diagonal de la habitación mide $\sqrt{3^2 + 2^2 + 1{,}5^2} = \sqrt{9 + 4 + 2{,}25} = \sqrt{15{,}25} \approx 3{,}91$ m. Como $3{,}5$, la barra cabe colocada en diagonal, de una esquina del suelo a la esquina opuesta del techo. De hecho, también cabría tumbada en el suelo, aunque por poco, porque la diagonal del suelo mide $\sqrt{13} \approx 3{,}61$ m, algo más que 3,5 m.

¿Sabías que...? Pitágoras sin Pitágoras

Mucho antes que los griegos, los babilonios ya conocían ternas como $(3, 4, 5)$: una tablilla de arcilla de hace unos 3 800 años, llamada Plimpton 322, recoge quince ternas pitagóricas. En Egipto, según una tradición, los agrimensores usaban una cuerda con 12 nudos igualmente espaciados para trazar ángulos rectos formando un triángulo de lados 3, 4 y 5.

El consejo de Otto

Aprende de memoria las ternas $(3, 4, 5)$ y $(5, 12, 13)$: muchos problemas las usan. Si los lados de un triángulo son múltiplos de 3, 4 y 5, ya sabes que es rectángulo.