Soluciones - Teorema de Pitágoras

Curso: 2 Eso

Solución del ejercicio 1

a. La hipotenusa es el lado mayor; sumamos los cuadrados de los catetos y hacemos la raíz. $a^2 = 36 + 64 = 100$, $a = 10$ cm.
b. Elevamos al cuadrado cada cateto, sumamos y extraemos la raíz. $a^2 = 25 + 144 = 169$, $a = 13$ cm.
c. Aplicamos $a^2 = b^2 + c^2$ con $b = 9$ y $c = 12$. $a^2 = 81 + 144 = 225$, $a = 15$ cm.
d. Sumamos 7^2 y 24^2 y hacemos la raíz cuadrada. $a^2 = 49 + 576 = 625$, $a = 25$ cm.

Todas son ternas pitagóricas: el resultado es un número entero.

Solución del ejercicio 2

a. Para un cateto restamos al cuadrado de la hipotenusa el del cateto conocido. $b^2 = 169 - 25 = 144$, $b = 12$ cm.
b. Restamos 8^2 a 17^2 y hacemos la raíz. $b^2 = 289 - 64 = 225$, $b = 15$ cm.
c. Restamos 20^2 a 25^2. $b^2 = 625 - 400 = 225$, $b = 15$ cm.
d. La resta no da un cuadrado perfecto; usamos la calculadora. $b^2 = 100 - 49 = 51$, $b = \sqrt{51} \approx 7{,}14$ cm.

Comprueba siempre que el cateto obtenido es menor que la hipotenusa.

Solución del ejercicio 3

a. Sumamos los cuadrados de los catetos; 34 no es un cuadrado perfecto. $a = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34} \approx 5{,}83$ cm.
b. Sumamos 4^2 y 7^2 y redondeamos la raíz. $a = \sqrt{16 + 49} = \sqrt{65} \approx 8{,}06$ cm.
c. Con catetos iguales la hipotenusa es el cateto por $\sqrt{2}$. $a = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83$ cm.
d. Con decimales se procede igual; aquí la raíz es exacta. $a = \sqrt{2{,}25 + 4} = \sqrt{6{,}25} = 2{,}5$ m.

Redondeamos a las centésimas solo al final del cálculo.

Solución del ejercicio 4

a. Comparamos el cuadrado del lado mayor con la suma de los otros dos: $15^2 = 225$

y $9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$. Sí es rectángulo.

b. Comparamos 11^2 con $7^2 + 8^2$: $11^2 = 121$ y $7^2 + 8^2 = 49 + 64 = 113$. No es rectángulo: es obtusángulo.
c. Comparamos 29^2 con $20^2 + 21^2$: $29^2 = 841$ y $20^2 + 21^2 = 400 + 441 = 841$. Sí es rectángulo.
d. Comparamos 7^2 con $5^2 + 6^2$: $7^2 = 49$ y $5^2 + 6^2 = 61 > 49$. No es rectángulo: es acutángulo.

Así usamos el recíproco del teorema para clasificar triángulos por sus ángulos.

Solución del ejercicio 5

a. Sustituimos $m = 2$, $n = 1$ en las tres fórmulas: $b = 4$, $c = 3$, $a = 5$: terna $(3, 4, 5)$.
b. Sustituimos $m = 3$, $n = 2$: $b = 12$, $c = 5$, $a = 13$: terna $(5, 12, 13)$.
c. Sustituimos $m = 4$, $n = 1$ y comprobamos: $b = 8$, $c = 15$, $a = 17$: $8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289 = 17^2$.
d. Multiplicamos cada número por 5 y comprobamos: $(15, 20, 25)$: $225 + 400 = 625 = 25^2$. Si se multiplican todos por el mismo número, se mantiene la relación.

Solución del ejercicio 6

a. La diagonal es la hipotenusa de un triángulo con catetos 12 y 5: $d = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$ cm.
b. En un cuadrado los dos catetos son iguales al lado: $d = \sqrt{64 + 64} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2} \approx 11{,}31$ cm.
c. Planteamos $l^2 + l^2 = 10^2$ y despejamos: $2l^2 = 100$, $l^2 = 50$, $l = \sqrt{50} \approx 7{,}07$ cm.
d. Calculamos primero el lado que falta y después el área: $l = \sqrt{289 - 64} = \sqrt{225} = 15$ cm. Área: $8 \cdot 15 = 120$ cm².

La diagonal de un cuadrado de lado l mide siempre $l\sqrt{2}$.

Solución del ejercicio 7

a. La altura, media base y un lado igual forman un triángulo rectángulo: Mitad de la base: 6 cm. $h = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8$ cm.
b. Área = base por altura entre dos: $A = \dfrac{12 \cdot 8}{2} = 48$ cm².
c. Sumamos los tres lados: $P = 10 + 10 + 12 = 32$ cm.
d. Repetimos con la nueva base: Mitad: 8 cm. $h = \sqrt{100 - 64} = 6$ cm. Área: $\dfrac{16 \cdot 6}{2} = 48$ cm² (la misma que antes).

Curiosamente, los dos triángulos tienen la misma área.

Solución del ejercicio 8

a. La altura divide la base en dos mitades de 5 cm; aplicamos Pitágoras: $h = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} \approx 8{,}66$ cm.

b. La superficie del equilátero de lado 10 cm usa esa altura: $A = \frac{10 \cdot 8{,}66}{2} \approx 43{,}30$ cm².

c. Sustituimos la mitad del lado, $\frac{l}{2}$, y simplificamos: $h = \sqrt{l^2 - \frac{l^2}{4}} = \frac{l\sqrt{3}}{2}$.

d. Multiplicamos por 6 el área de un triángulo equilátero: $6 \cdot 43{,}30 \approx 259{,}81$ cm².

La fórmula $h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$ sirve para cualquier triángulo equilátero.

Solución del ejercicio 9

a. La escalera es la hipotenusa; la distancia al pie y la altura son los catetos: $h = \sqrt{25 - 9} = 4$ m.

b. Repetimos con el pie a 4 m: $h = \sqrt{25 - 16} = 3$ m.

c. Ahora conocemos la altura y buscamos el otro cateto: $d = \sqrt{25 - 4{,}8^2} = \sqrt{25 - 23{,}04} = \sqrt{1{,}96} = 1{,}4$ m.

d. Razonamos el caso límite: Como máximo 5 m, cuando la escalera está tumbada en el suelo (altura 0).

Cuanto más se aleja el pie, menos altura alcanza la escalera.

Solución del ejercicio 10

a. La diagonal es la hipotenusa con catetos 24 y 18: $d = \sqrt{24^2 + 18^2} = \sqrt{576 + 324} = \sqrt{900} = 30$ cm.

b. Dividimos entre 2,54 cm por pulgada: $30 : 2{,}54 \approx 11{,}8$ pulgadas.

c. Calculamos la razón de semejanza y la aplicamos: Razón $\frac{32}{24} = \frac{4}{3}$. Alto: $18 \cdot \frac{4}{3} = 24$ cm. Diagonal: $30 \cdot \frac{4}{3} = 40$ cm.

d. Las áreas se multiplican por el cuadrado de la razón: Razón de áreas: $\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9} \approx 1{,}78$.

Solución del ejercicio 11

a. Restamos coordenadas y aplicamos Pitágoras: $d = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$.
b. Las diferencias son 5 y -12: $d = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = \sqrt{169} = 13$.
c. Las diferencias son 5 y 5: $d = \sqrt{25 + 25} = \sqrt{50} \approx 7{,}07$.
d. Calculamos los tres lados y aplicamos el recíproco: $AB = 3$, $BC = 4$ y $AC = \sqrt{9 + 16} = 5$. Como $3^2 + 4^2 = 5^2$, es rectángulo en B. Perímetro: $3 + 4 + 5 = 12$.

La fórmula de la distancia es el teorema de Pitágoras con las diferencias de coordenadas como catetos.

Solución del ejercicio 12

a. La diagonal es la hipotenusa con catetos 100 y 64: $d = \sqrt{100^2 + 64^2} = \sqrt{14\,096} \approx 118{,}73$ m.
b. Comparamos el camino por el borde con la diagonal: Por el borde: $100 + 64 = 164$ m. Ahorro: $164 - 118{,}73 = 45{,}27$ m.
c. Dividimos los metros ahorrados entre la velocidad: $45{,}27 : 5 \approx 9{,}05$ s.
d. Calculamos el área y la pasamos a hectáreas: $100 \cdot 64 = 6\,400$ m² $= 0{,}64$ ha.

Solución del ejercicio 13

a. El mástil y la distancia en el suelo son los catetos; el cable, la hipotenusa: $\sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$ m.
b. Multiplicamos la longitud por el precio: $13 \cdot 4{,}50 = 58{,}50$ €.
c. Repetimos con 9 m de distancia: $\sqrt{144 + 81} = \sqrt{225} = 15$ m.
d. Duplicamos la longitud y el coste: Dos cables: $2 \cdot 13 = 26$ m, que cuestan $26 \cdot 4{,}50 = 117$ €.

Solución del ejercicio 14

a. La rampa es la hipotenusa con catetos 1,2 y 5: $\sqrt{1{,}2^2 + 5^2} = \sqrt{26{,}44} \approx 5{,}14$ m.
b. Dividimos la altura entre la longitud horizontal: $\frac{1{,}2}{5} \cdot 100 = 24\,\%$.
c. Comparamos con el máximo permitido: No cumple: $24\,\% > 8\,\%$.
d. Despejamos la longitud horizontal de la pendiente: $\frac{1{,}2}{0{,}08} = 15$ m.

Una pendiente del 24 % es demasiado empinada para una silla de ruedas.

Solución del ejercicio 15

a. El atajo es la hipotenusa con catetos 300 y 400: $\sqrt{300^2 + 400^2} = \sqrt{250\,000} = 500$ m.
b. Restamos el atajo al camino por calles: Por calles: 700 m. Ahorro: $700 - 500 = 200$ m.
c. El ahorro de ida y vuelta se divide entre la velocidad: Ida y vuelta: 400 m. Tiempo: $400 : 1{,}25 = 320$ s $\approx 5{,}3$ minutos.
d. Dividimos el atajo entre el camino por calles: $\frac{500}{700} = \frac{5}{7}$.

Solución del ejercicio 16

a. La cuerda es la hipotenusa; la distancia horizontal, un cateto: $h = \sqrt{50^2 - 30^2} = \sqrt{1\,600} = 40$ m.
b. Sumamos la altura de las manos: $40 + 1{,}5 = 41{,}5$ m.
c. Repetimos con 60 m de cuerda: Con 60 m de cuerda: $h = \sqrt{60^2 - 30^2} = \sqrt{2\,700} \approx 51{,}96$ m sobre las manos, es decir, unos $53{,}46$ m sobre el suelo.
d. Ahora buscamos la hipotenusa con catetos 60 y 30: $\sqrt{60^2 + 30^2} = \sqrt{4\,500} \approx 67{,}08$ m.

Solución del ejercicio 17

a. La diferencia de bases y la altura son los catetos; el lado oblicuo, la hipotenusa: Diferencia de bases: $16 - 10 = 6$ m. $h = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8$ m.
b. Área del trapecio = semisuma de bases por altura: $A = \frac{(10 + 16) \cdot 8}{2} = 104$ m².
c. Sumamos los cuatro lados: Lados: $10 + 16 + 8 + 10 = 44$ m.
d. El césped del trapecio se paga a 2,80 € el metro cuadrado: $104 \cdot 2{,}8 = 291{,}20$ €.
e. Sumamos la altura y el lado oblicuo: Lados no paralelos: $8 + 10 = 18$ m.

Solución del ejercicio 18

a. Aplicamos Pitágoras en la base: $d_1 = \sqrt{12^2 + 4^2} = \sqrt{160} \approx 12{,}65$ cm.
b. Aplicamos Pitágoras con la diagonal de la base y la altura: $D = \sqrt{12^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{169} = 13$ cm.
c. Comparamos las longitudes con la diagonal interior: El de 13 cm cabe justo (en diagonal). El de 13,5 cm no cabe.

d. Comparamos con la diagonal de la base: La base mide 12×4 cm, con diagonal $12{,}65$ cm. El bolígrafo de 12,5 cm cabe en diagonal.

Solución del ejercicio 19

a. El regreso es la hipotenusa con catetos 12 y 5: $\sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$ km.
b. Sumamos los tres tramos: $12 + 5 + 13 = 30$ km.
c. Dividimos la distancia entre la velocidad: $13 : 26 = 0{,}5$ h (30 minutos).
d. Comparamos el rodeo con el camino directo: La ida con rodeo fue $12 + 5 = 17$ km; en línea recta habría sido 13 km. Ahorro: 4 km.

Solución del ejercicio 20

a. Hipotenusa: $\sqrt{225 + 400} = 25$ cm. Área: $\dfrac{15 \cdot 20}{2} = 150$ cm². También $\dfrac{25 \cdot h}{2} = 150$, luego $h = 12$ cm.
b. Los catetos miden 3 cm y 4 cm. El cuadrado de la hipotenusa tiene área $9 + 16 = 25$ cm² (hipotenusa 5 cm).
c. Sí: $2c^2 = 100$, $c^2 = 50$, $c = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7{,}07$ cm.
d. Por ejemplo $(20, 21, 29)$: $400 + 441 = 841 = 29^2$. También $(20, 99, 101)$ o $(15, 20, 25)$.